Tema 2

1.- Redes Eléctricas. Leyes de Kirchhoff. Elementos de Circuito

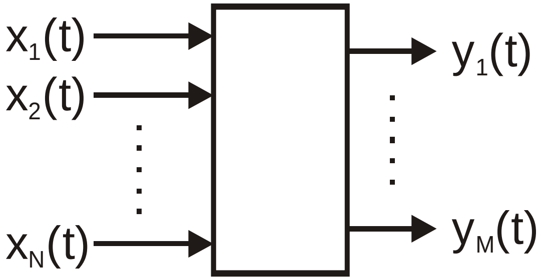
<u>2.- Métodos de Análisis de Circuitos Eléctricos</u>

- 2.1.- Circuitos eléctricos como sistemas lineales: Principio de superposición
- 2.2.- Teorema de Thèvenin
- 2.3.- Teorema de Norton
- 2.4.- Método de análisis de las corrientes en las mallas
- 2.5.- Método de análisis de las tensiones en los nudos

3.- Elementos reactivos. Respuesta transitoria
4.- Régimen Permanente Sinusoidal
5.- Análisis de Circuitos basado en la Transformada de Laplace
6.- Cuadripolos

2.1.- Circuitos eléctricos como sistemas lineales. Principio de superposición

En general, un circuito puede tratarse como un **sistema**: Las variables de entrada o excitaciones suelen ser las fuentes independientes, y la respuesta o variables de salida pueden ser cualesquiera magnitudes de interés, por ejemplo la tensión o la corriente en algún elemento.



$$y = F(x)$$

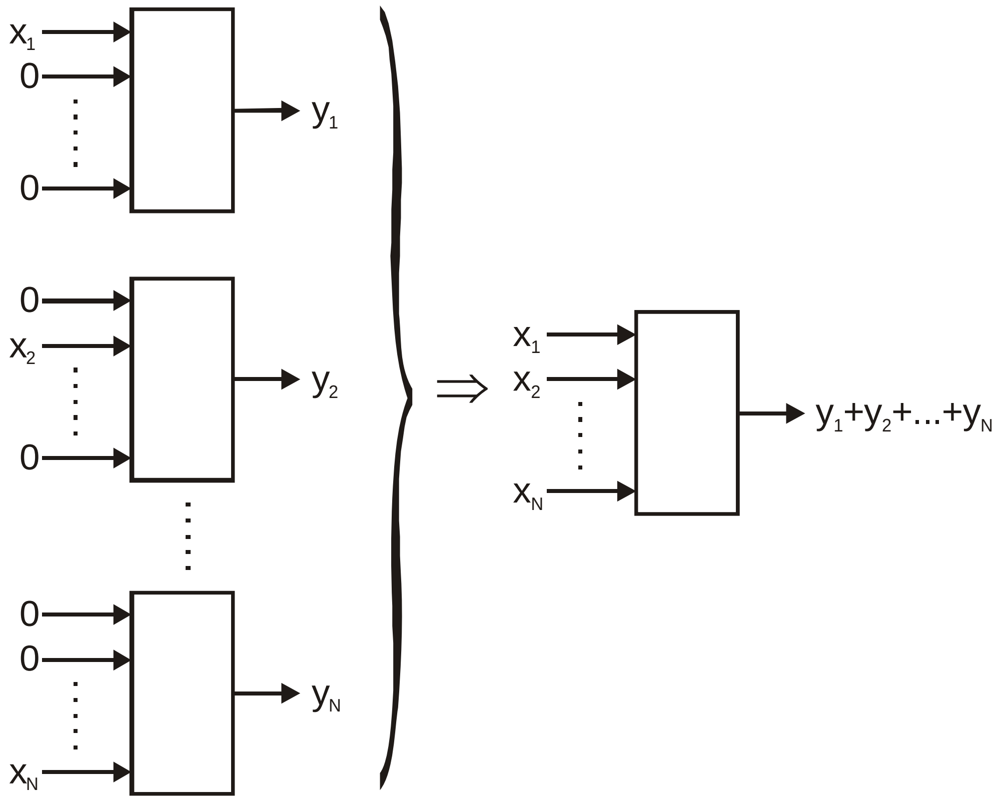
;

El sistema es lineal si la función F es lineal:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \quad y_1 = F(x_1) \quad \text{e} \quad y_2 = F(x_2) \\ \qquad \Rightarrow \quad F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{array}}$$

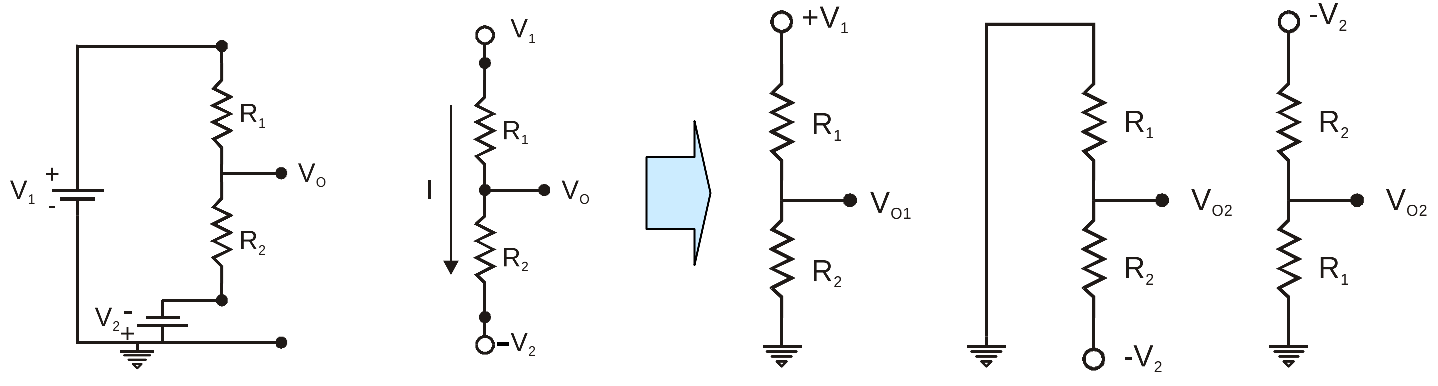
En esta asignatura analizaremos casi siempre sistemas lineales, ya que estarán compuestos por elementos lineales y las leyes de Kirchhoff también son lineales.
(Excepción: no serán sistemas lineales los sistemas que contienen elementos no lineales como los estudiados en 1.7)
Sentido más amplio: Los sistemas lineales cumplen el **principio de superposición.**

Principio de superposición: Si sobre un sistema actúan simultáneamente un conjunto de entradas, la salida que se obtiene es la suma de las salidas que se obtendrían si cada una de las entradas actuase por separado, siendo nulas las demás.



El sistema es, además, lineal para cada una de las entradas

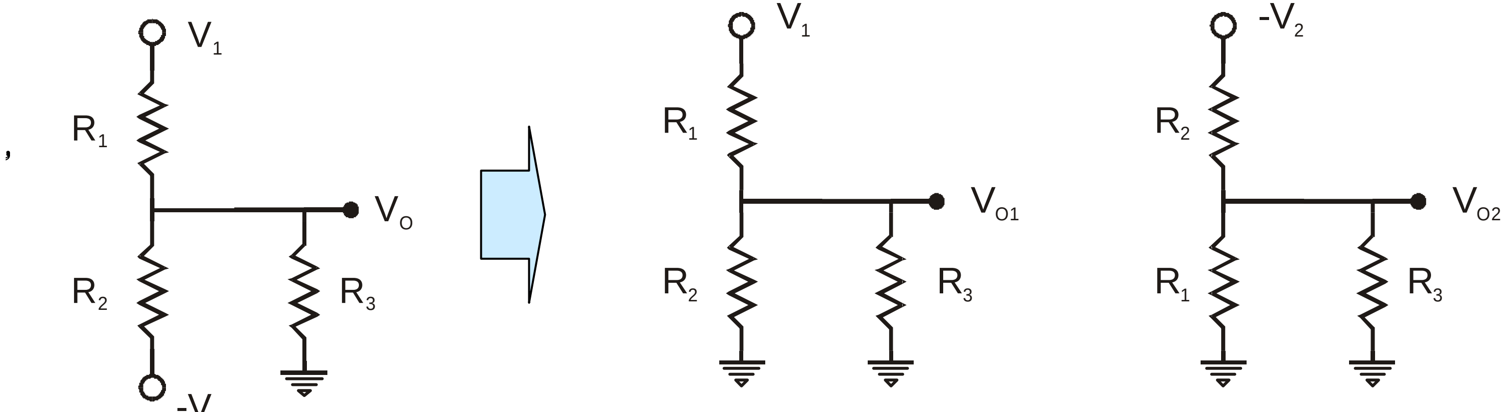
Ejemplos:



(a) (b) (a) (b)

$$V_{O1} = \frac{V_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad , \quad V_{O2} = \frac{-V_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{V_1 R_2 - V_2 R_1}{R_1 + R_2}$$



(a) (b)

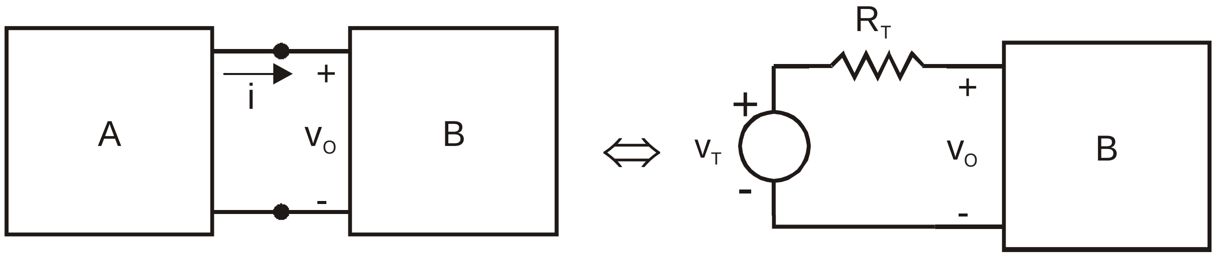
$$V_{o1} = \frac{(R_2 \parallel R_3) V_1}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} = \frac{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} V_1}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} = \frac{R_2 R_3 V_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$V_{o2} = \frac{(R_1 \parallel R_3)(-V_2)}{R_2 + (R_1 \parallel R_3)} = \frac{-\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} V_2}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = \frac{-R_1 R_3 V_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

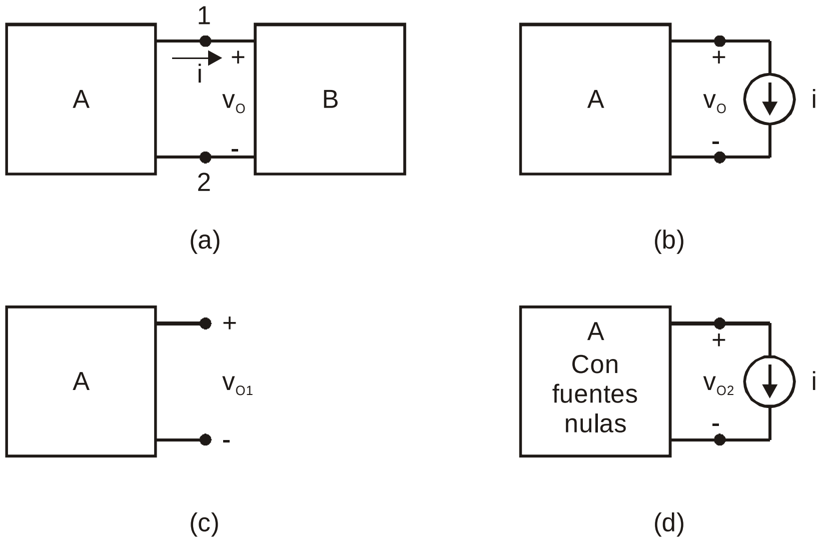
$$V_o = V_{o1} + V_{o2} = \frac{(V_1 R_2 - V_2 R_1) R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

2.2.- Teorema de Thèvenin

"Cualquier circuito lineal activo con dos terminales de salida puede sustituirse por una fuente de tensión ideal v_T en serie con una resistencia R_T. La tensión equivalente de Thevenin v_T es la tensión medida entre los terminales de salida cuando éstos están en circuito abierto, y la resistencia equivalente R_T es la resistencia medida desde los terminales de salida cuando se anulan todas las fuentes internas independientes"

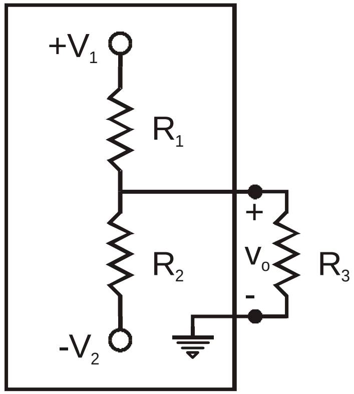


Demostración:

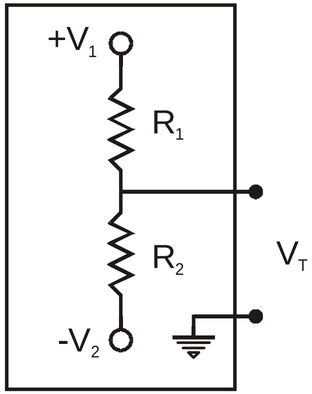


$$v_O = v_{O1} + v_{O2} = v_T - i \cdot R_T$$

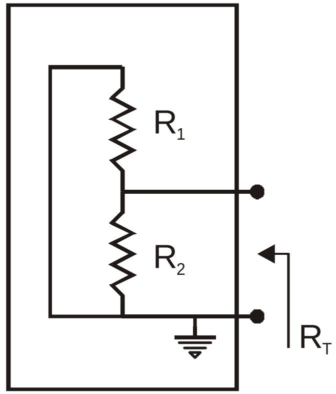
<u>Ejemplo:</u>



(a)



(b)

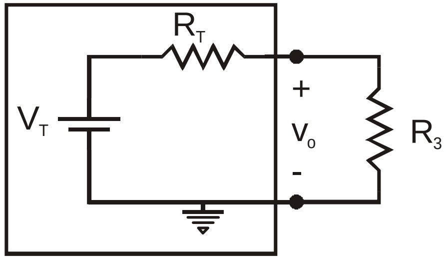


(c)

$$V_T = \frac{V_1 R_2 - V_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

$$R_T = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

.



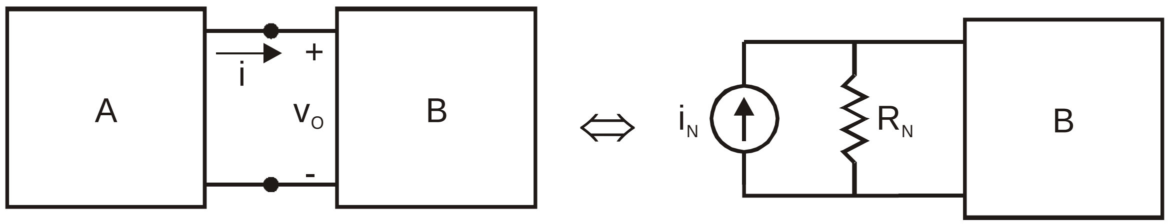
(d)

$$V_o = V_T \frac{R_3}{R_3 + R_T} \quad \Rightarrow$$

$$V_o = \frac{V_1 R_2 - V_2 R_1}{R_1 + R_2} \frac{R_3}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\left(V_1 R_2 - V_2 R_1\right) R_3}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}$$

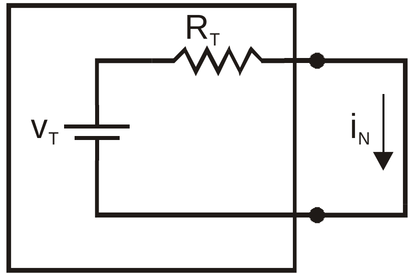
2.3.- Teorema de Norton

"Cualquier circuito lineal activo con dos terminales de salida puede sustituirse por una fuente de intensidad i_N en paralelo con una resistencia R_N. La corriente de la fuente equivalente de Norton es la corriente que circularía entre los terminales de salida en cortocircuito, y la resistencia equivalente es la resistencia medida desde los terminales de salida cuando se anulan todas las fuentes independientes"



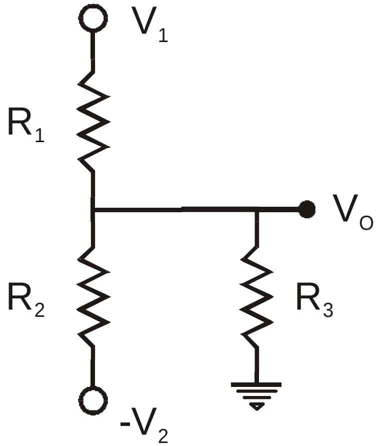
:

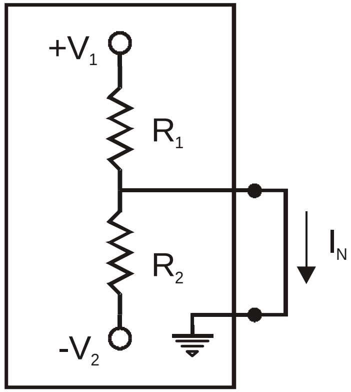
Demostración: Podemos aprovechar la equivalencia entre fuentes de tensión y fuentes de corriente



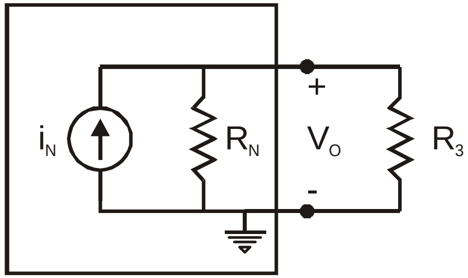
$$i_N = \frac{v_T}{R_T} \quad , \quad R_N = R_T$$

Ejemplo:





(a)



(b)

$$I_N = I_1 + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_N = \frac{V_1}{R_1} + \frac{-V_2}{R_2} \qquad\qquad R_N = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

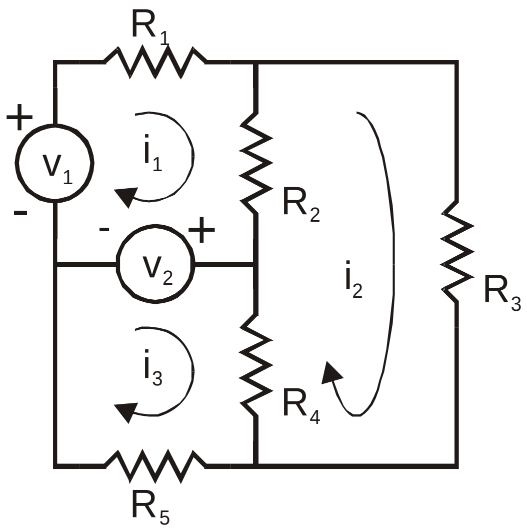
$$V_o = I_N \left(R_N \parallel R_3 \right) = I_N \left(\frac{1}{R_N} + \frac{1}{R_3} \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad V_o = \frac{\frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

2.4.- Método de análisis de las corrientes en las mallas

Se supone una corriente para cada malla, y se plantea un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones e incógnitas como mallas independientes tengamos en el circuito

Ejemplo:



1) $i_1 R_1 + (i_1 - i_2) R_2 + v_2 - v_1 = 0$

$\Rightarrow \quad v_1 - v_2 = i_1 (R_1 + R_2) - i_2 R_2$

2) $i_2 R_3 + (i_2 - i_3) R_4 + (i_2 - i_1) R_2 = 0$

$\Rightarrow \quad -i_1 R_2 + i_2 (R_2 + R_3 + R_4) - i_3 R_4 = 0$

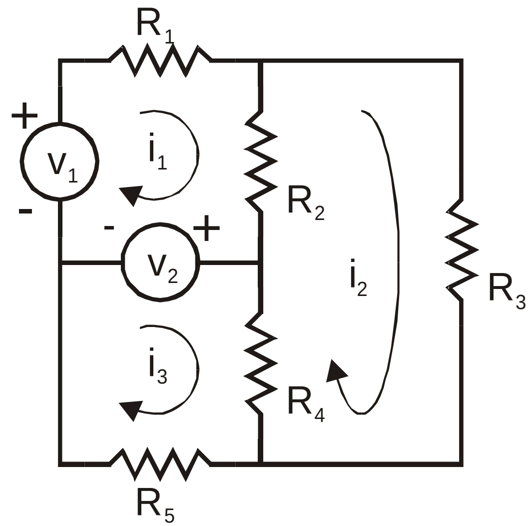
3) $(i_3 - i_2) R_4 + i_3 R_5 - v_2 = 0$

$\Rightarrow \quad v_2 = -i_2 R_4 + i_3 (R_4 + R_5)$

$$
\begin{aligned}
i_1 (R_1 + R_2) - i_2 R_2 &= v_1 - v_2 \\
-i_1 R_2 + i_2 (R_2 + R_3 + R_4) - i_3 R_4 &= 0 \\
-i_2 R_4 + i_3 (R_4 + R_5) &= v_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ 0 & -R_4 & R_4 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ 0 \\ v_2 \end{pmatrix}
$$

$$i_1(R_1+R_2)-i_2R_2=v_1-v_2$$
$$-i_1R_2+i_2(R_2+R_3+R_4)-i_3R_4=0$$
$$-i_2R_4+i_3(R_4+R_5)=v_2$$

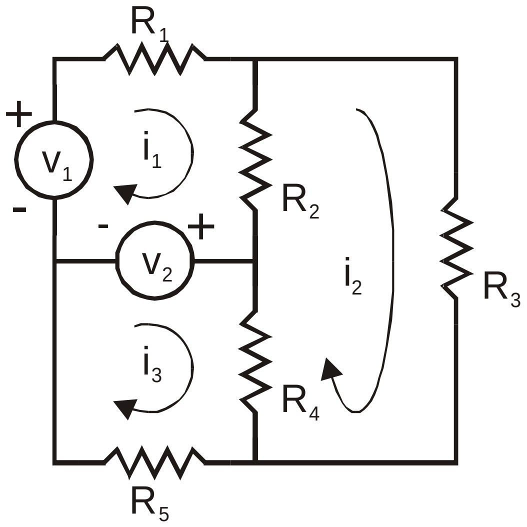


Planteamiento sistemático:

1) Se plantean tantas ecuaciones como mallas independientes. A cada una de las mallas se le asigna una corriente, todas ellas en el mismo sentido de giro (por ejemplo, en el sentido de avance de las agujas del reloj). Los valores de esas corrientes serán las incógnitas.
2) El término independiente correspondiente a cada ecuación de una malla es la suma de las fuentes de tensión de dicha malla, tomando como positivas las que favorezcan a la corriente, según el sentido de giro que hemos supuesto, y negativas las que se opongan a ella.
3) Los coeficientes de las incógnitas se obtienen de la forma siguiente:
    - El coeficiente de una incógnita en la ecuación de su propia malla es la suma de resistencias de la malla.
    - El coeficiente de una incógnita en la ecuación de otra malla es la suma de resistencias de la rama que comparte dicha malla con la de la incógnita, con signo negativo
4) Finalmente, resolviendo el sistema se obtienen las corrientes incógnita.

¡Advertencia: Previamente hemos de pasar todas las fuentes a fuentes de tensión!

• Solución:



$$i_1\left(R_1+R_2\right)-i_2R_2=v_1-v_2$$
$$-i_1R_2+i_2\left(R_2+R_3+R_4\right)-i_3R_4=0$$
$$-i_2R_4+i_3\left(R_4+R_5\right)=v_2$$

$R_1=2\,\mathrm{K\Omega}$, $R_2=1\,\mathrm{K\Omega}$, $R_3=1\,\mathrm{K\Omega}$, $R_4=5\,\mathrm{K\Omega}$,
$R_5=3\,\mathrm{K\Omega}$, $v_1=9\,\mathrm{V}$, $v_2=14\,\mathrm{V}$

$$\begin{pmatrix} 3\,\mathrm{K\Omega} & -1\,\mathrm{K\Omega} & 0 \\ -1\,\mathrm{K\Omega} & 7\,\mathrm{K\Omega} & -5\,\mathrm{K\Omega} \\ 0 & -5\,\mathrm{K\Omega} & 8\,\mathrm{K\Omega} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5\,\mathrm{V} \\ 0 \\ 14\,\mathrm{V} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -5 \\ 0 & -5 & 8 \end{vmatrix}=85\left(\mathrm{K\Omega}\right)^3$$

$$i_1=\frac{\begin{vmatrix} -5V & -1k\Omega & 0 \\ 0 & 7k\Omega & -5k\Omega \\ 14V & -5k\Omega & 8k\Omega \end{vmatrix}}{\Delta}$$
$$=\frac{-5V\cdot 31\left(k\Omega\right)^2+14V\cdot 5\left(k\Omega\right)^2}{85\left(k\Omega\right)^3}=\frac{-85V}{85k\Omega}=-1mA$$

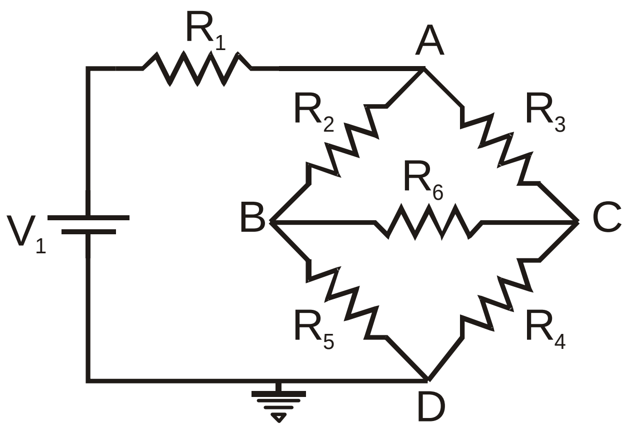
$$i_2=\frac{\begin{vmatrix} 3\,\mathrm{K\Omega} & -5\,\mathrm{V} & 0 \\ -1\,\mathrm{K\Omega} & 0 & -5\,\mathrm{K\Omega} \\ 0 & 14\,\mathrm{V} & 8\,\mathrm{K\Omega} \end{vmatrix}}{\Delta}$$
$$=\frac{5\,\mathrm{V}\cdot(-8)\left(\mathrm{K\Omega}\right)^2-14\,\mathrm{V}\cdot(-15)\left(\mathrm{K\Omega}\right)^2}{85\left(\mathrm{K\Omega}\right)^3}=\frac{170\,\mathrm{V}}{85\,\mathrm{K\Omega}}=2\,\mathrm{mA}$$

$$i_2=\frac{\begin{vmatrix} 3\,\mathrm{K\Omega} & -1\,\mathrm{K\Omega} & -5\,\mathrm{V} \\ -1\,\mathrm{K\Omega} & 7\,\mathrm{K\Omega} & 0 \\ 0 & -5\,\mathrm{K\Omega} & 14\,\mathrm{V} \end{vmatrix}}{\Delta}$$
$$=\frac{-5\,\mathrm{V}\cdot 5\left(\mathrm{K\Omega}\right)^2+14\,\mathrm{V}\cdot 20\left(\mathrm{K\Omega}\right)^2}{85\left(\mathrm{K\Omega}\right)^3}=\frac{285\,\mathrm{V}}{85\,\mathrm{K\Omega}}=3\,\mathrm{mA}$$

2.4.- Método de análisis de las tensiones en los nudos

Se eligen como incógnitas las tensiones en los nudos del circuito y se aplica la segunda ley de Kirchhoff a cada uno de ellos

Ejemplo:



Para el nudo *A*: $$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_C - V_A}{R_3} = 0$$

Para el nudo *B*: $$\frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_B - V_A}{R_2} + \frac{V_C - V_A}{R_3} = 0$$

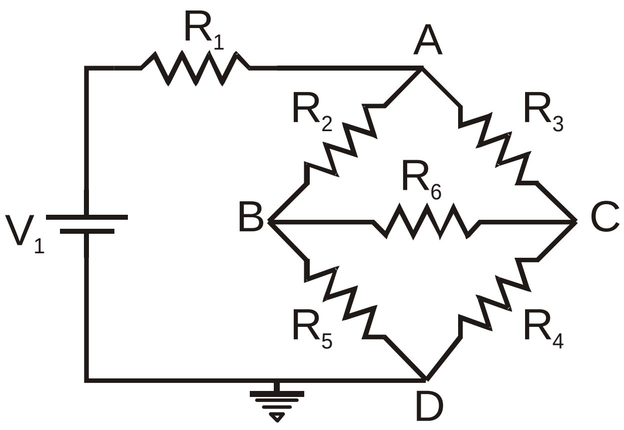
Y para el nudo *C*: $$\frac{V_A - V_C}{R_3} + \frac{V_B - V_C}{R_6} + \frac{V_D - V_C}{R_4} = 0$$

$$V_D = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_1}{R_1} = V_A\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) - V_B\frac{1}{R_2} - V_C\frac{1}{R_3}$$

$$0 = -V_A\frac{1}{R_2} + V_B\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_5}\right) - V_C\frac{1}{R_6}$$

$$0 = -V_A\frac{1}{R_3} - V_B\frac{1}{R_6} + V_C\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_4}\right)$$



$$\frac{V_1}{R_1} = V_A\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) - V_B\frac{1}{R_2} - V_C\frac{1}{R_3}$$

$$0 = -V_A\frac{1}{R_2} + V_B\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_5}\right) - V_C\frac{1}{R_6}$$

$$0 = -V_A\frac{1}{R_3} - V_B\frac{1}{R_6} + V_C\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_4}\right)$$

Planteamiento sistemático:

1) El número de ecuaciones será igual al número de nudos menos uno.

2) El término independiente correspondiente a la ecuación de un nudo es la suma de las fuentes de corriente que inciden en el nudo y de las fuentes de tensión multiplicadas por la conductancia de las ramas que las contienen, si dichas ramas también inciden en el nudo.
3) Los coeficientes de las incógnitas se obtienen como sigue:
    - El coeficiente de una tensión incógnita en la ecuación de su propio nudo es la suma de las conductancias (inversas de las resistencias) de las ramas que inciden en dicho nudo.
    - El coeficiente de una tensión incógnita en la ecuación de otro nudo es la conductancia de la rama que une dicho nudo con el de la incógnita, cambiada de signo.
4) Finalmente, resolviendo el sistema se obtienen las tensiones incógnita