Tema 3

1.- Redes Eléctricas. Leyes de Kirchhoff. Elementos de Circuito
2.- Métodos de Análisis de Circuitos Eléctricos

<u>3.- Elementos reactivos. Respuesta transitoria</u>

3.1.- Elementos reactivos
3.2.- Condensadores
3.3.- Inductores
3.4.- Circuitos con condensadores e inductores en condiciones de corriente continua
3.5.- Análisis de circuitos en régimen transitorio. Carga y descarga de un condensador

4.- Régimen Permanente Sinusoidal
5.- Análisis de Circuitos basado en la Transformada de Laplace
6.- Cuadripolos

3.1.- Elementos reactivos

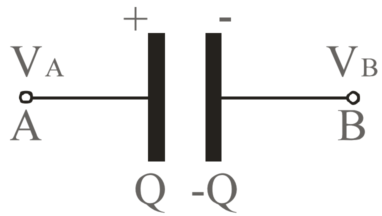
- Elementos en los cuales el conocimiento del valor de la tensión que soportan en un instante dado no nos permite conocer el valor de la corriente. Es necesario conocer la variación con el tiempo
- El término "reactivos" se justificará en el tema siguiente.

3.2.- Condensadores

- Un condensador ideal consiste en un par de armaduras perfectamente conductoras, muy próximas entre sí y separadas por un aislante perfecto.

- Los electrodos o armaduras conductoras se ejercen mutuamente una influencia eléctrica de forma que pueden almacenar cargas de signo contrario e iguales en módulo, manteniéndose neutro el elemento en su conjunto.

• Almacenamiento de carga ⇒ Diferencia de potencial entre los terminales



$$Q = C \cdot (v_A - v_B)$$

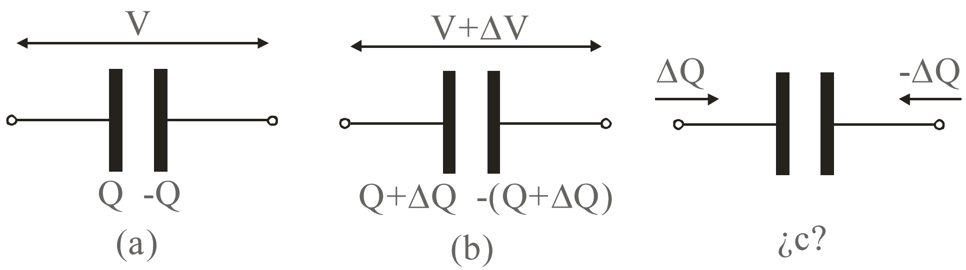
C = Capacidad del elemento. Su unidad en el S.I. es el Faradio: $1\ \text{F} = \dfrac{1\ \text{Culombio}}{1\ \text{Voltio}}$

1Culombio = 1Amperio·1segundo y 1 Ohmio = 1Voltio/1Amperio ⇒ $1\ \text{F} = \dfrac{1\ \text{s}}{1\ \Omega}$

• Variación de la carga almacenada ⇒ Corriente (aunque la carga no atraviesa físicamente el aislante)

$$q + \Delta q = C\cdot(v + \Delta v) \quad \Rightarrow \quad \Delta q = C\Delta v$$

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \boxed{i = C\frac{dv}{dt}}$$

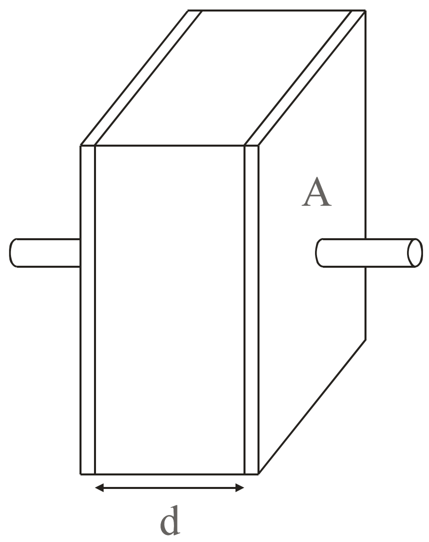


La derivada es una operación lineal ⇒ El condensador es un elemento lineal

• Consecuencias importantes:
  1) Como la corriente ha de ser finita, **es necesario que la tensión que soporta el condensador sea continua**
  2) Si v = constante ⇒ i = 0

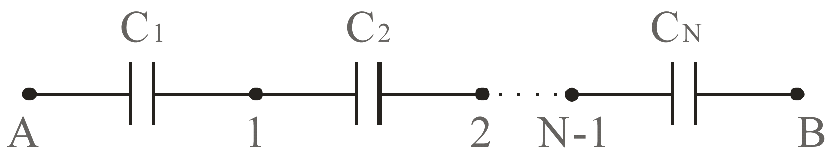
• La capacidad de un condensador depende:
  1) De la separación entre las armaduras
  2) Del área de las armaduras
  3) De las propiedades dieléctricas del material aislante

Ejemplo: Para un condensador plano, $C = \varepsilon \frac{A}{d}$



Asociación de condensadores:

a) En serie:



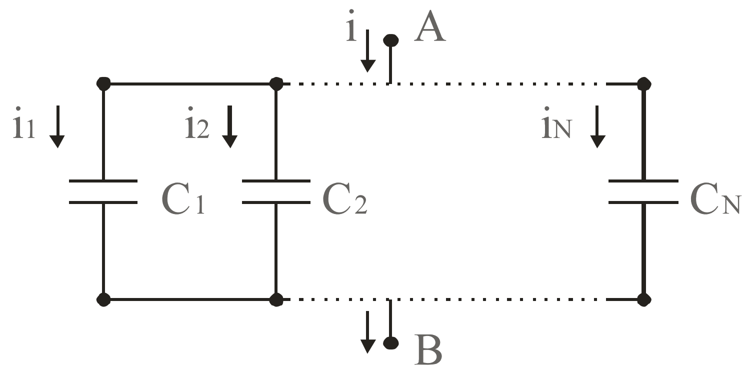
$$\left.\begin{aligned} i &= C_1 \frac{d(v_A - v_1)}{dt} \\ i &= C_2 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} \\ &\vdots \\ i &= C_N \frac{d(v_{N-1} - v_B)}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$i\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}\right)=\frac{d(v_A-v_B)}{dt}$$

$$i = C_{eq}\frac{d(v_A-v_B)}{dt} \Rightarrow \frac{i}{C_{eq}} = \frac{d(v_A-v_B)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_N}}$$

b) En paralelo:



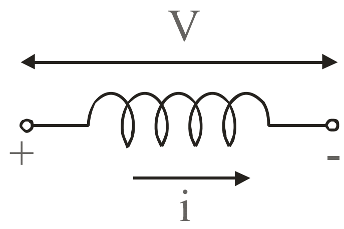
$$\left.\begin{aligned} i_1 &= C_1 \frac{d(v_A - v_B)}{dt} \\ i_2 &= C_2 \frac{d(v_A - v_B)}{dt} \\ &\vdots \\ i_N &= C_N \frac{d(v_A - v_B)}{dt} \end{aligned}\right\}$$

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N = (C_1 + C_2 + \cdots + C_N)\frac{d(v_A-v_B)}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N}$$

3.3.- Inductores

➢ Un inductor consiste en un conductor continuo enrollado de manera que forma un conjunto de espiras paralelas y próximas entre sí. Cuando es atravesado por una corriente eléctrica, se produce en su interior un campo magnético proporcional a la corriente que lo genera.



➢ El flujo magnético es proporcional a la corriente.

L = autoinducción (se mide en Henrios)

$$\Phi = L\cdot i$$

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de espiras

$$L \propto N^2$$

• Ley de Faraday: La variación del flujo magnético produce una diferencia de potencial entre los extremos del inductor

$$v = \frac{d\Phi}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = L\frac{di}{dt}} \qquad 1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{H}\frac{1\ \mathrm{A}}{1\ \mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad 1\ \mathrm{H} = 1\ \Omega \times 1\mathrm{s}$$

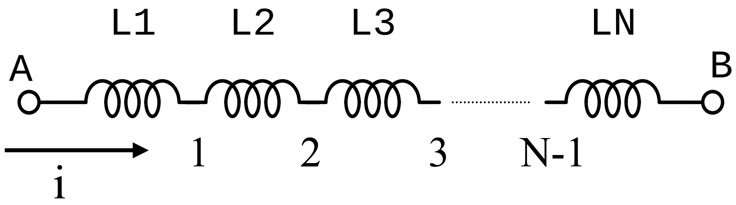
La derivada es una operación lineal ⇒ El inductor también es un elemento lineal

• Consecuencias importantes:

1) Para que la tensión en el inductor sea finita, **es necesario que la corriente que atraviesa el inductor sea continua**
2) Si i = constante ⇒ v = 0

Asociación de inductores:

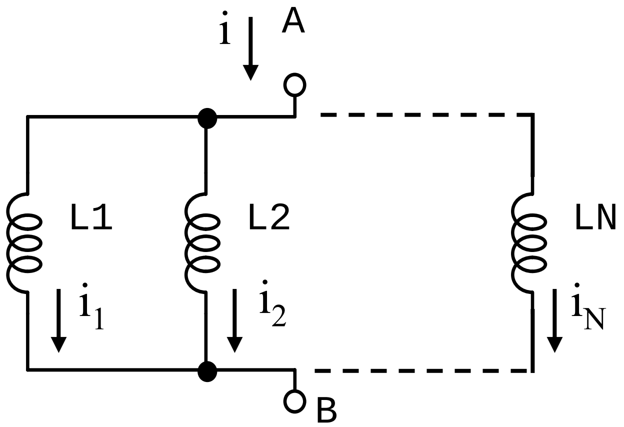
a) En serie:



$$v_A - v_B = (v_A - v_1) + (v_1 - v_2) + \cdots + (v_{N-1} - v_B) = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt}$$

$$v_A - v_B = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \cdots + L_N}$$

b) En paralelo:



$$i = i_1 + i_1 + \cdots + i_N \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} + \cdots + \frac{di_N}{dt}$$

$$v_A - v_B = L_{eq} \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} = \cdots = L_N \frac{di_N}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}}$$

3.4.- Circuitos con condensadores e inductores en condiciones de corriente continua

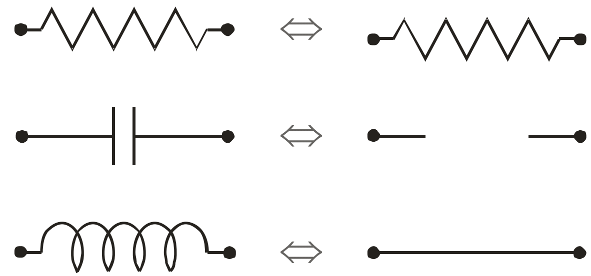
• Condiciones de corriente continua (o condiciones DC) : todas las **tensiones y corrientes eléctricas** son **constantes en el tiempo**. Al ser los circuitos causales, es necesario que las entradas o excitaciones externas sean también constantes en el tiempo.

• Relación entre corrientes y tensiones en los elementos pasivos:

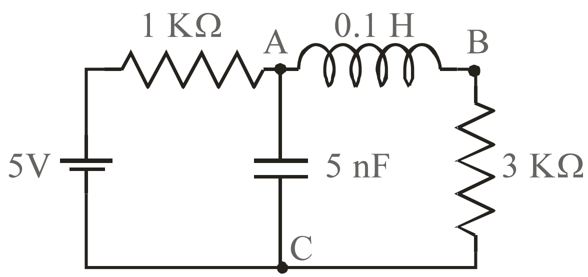
a) Resistor: $V = I \cdot R$

b) Condensador: $i = C\dfrac{dV}{dt}$ $\quad \boxed{V = cte \quad \Rightarrow \quad i = 0}$

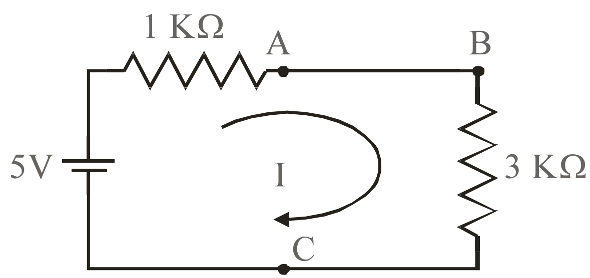
c) Inductor: $v = C\dfrac{dI}{dt}$ $\quad \boxed{I = cte \quad \Rightarrow \quad v = 0}$



Ejemplo:



(a)



(b)

$$I = I_1 = I_3 = \frac{5\text{V}}{3\text{k}\Omega + 1\text{k}\Omega} = 1.25\text{mA}$$

$$V_A - V_C = 5\text{V} - 1.25\text{mA} \times 1\text{k}\Omega =$$
$$= 1.25\text{mA} \times 3\text{k}\Omega = 3.75\ \text{V}$$

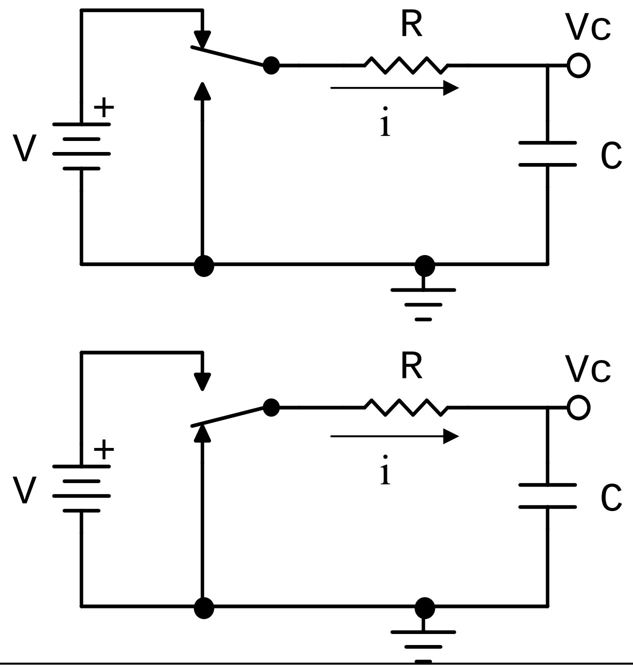
$$Q = C(V_A - V_C) = 5\text{nF} \times 3.75\text{V} = 18.75 \times 10^{-9}\ \text{C}$$

3.5.- Análisis de circuitos en régimen transitorio. Carga y descarga de un condensador

• Las condiciones de corriente continua requieren que las fuentes externas sean constantes y que lleven actuando sobre el circuito un tiempo suficientemente largo. Si se conectan las fuentes o se alteran bruscamente sus valores, tiene lugar una respuesta transitoria, variable en el tiempo, que tiende al valor que le corresponde en las nuevas condiciones DC.

• Un ejemplo simple: carga y descarga de un condensador

a) Descarga de un condensador : En t = 0 cambia la posición del conmutador

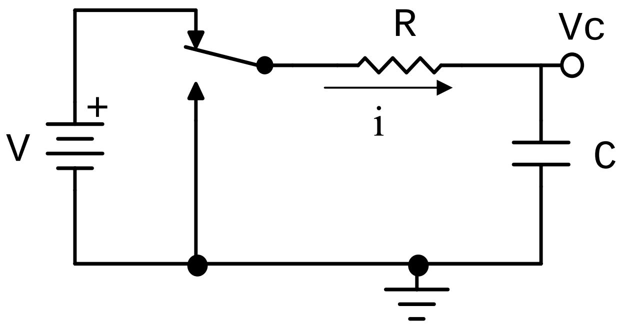


- En $t < 0$, interruptor conectado a V $\Rightarrow$ $v_C = V$
- En $t \geq 0$, interruptor conectado a tierra $\Rightarrow$
  - Cuando $t \to \infty$, $v_C \to 0$
  - En $t = 0$, $v_C(0) = V$ (la tensión en el condensador ha de mantenerse continua)
  - Entre ambas situaciones, v_C varía con el tiempo

Para $t \geq 0$: $\left. \begin{array}{l} 0 = iR + v_C \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{array} \right\} \quad RC\dfrac{dv_C}{dt} + v_C = 0$

$\tau = RC$: Constante de tiempo del circuito

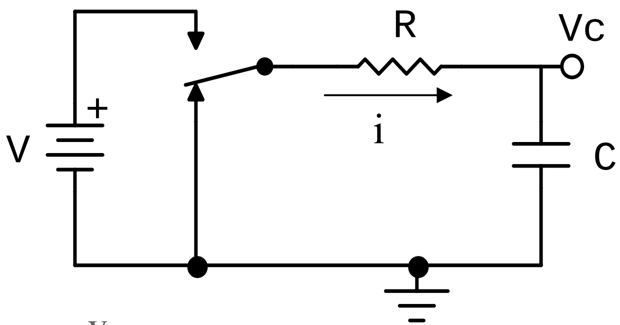
a) <u>Descarga de un condensador</u> :



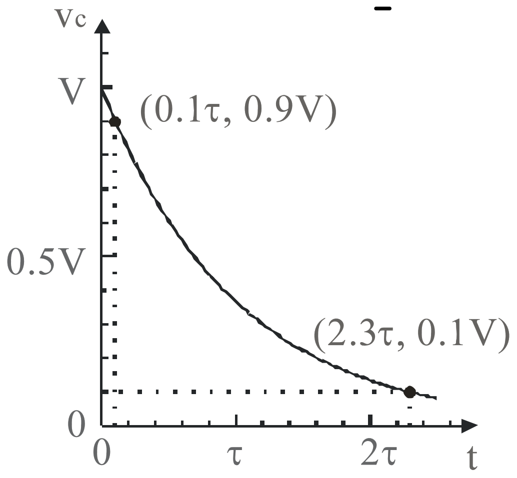
- En t < 0, interruptor conectado a V $\Rightarrow$ $v_C = V$
- En t ≥ 0, interruptor conectado a tierra $\Rightarrow$

Para t ≥ 0 : $$\tau \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0 \quad con \quad \tau = RC \quad y \quad v_C(0) = V$$

Solución: $$v_C(t) = v_C(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{v_C(t) = V\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$



Definición: Tiempo de bajada es el tiempo que transcurre desde que la tensión pasa del 90% del valor máximo al 10% del valor máximo

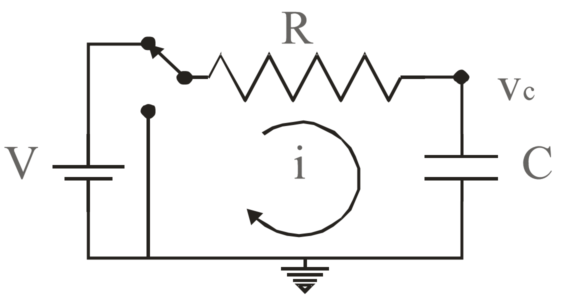


$$\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 0.9 \Rightarrow t_1 = -\tau \ln 0.9 \Rightarrow t_1 = 0.1\tau$$

$$\exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) = 0.1 \Rightarrow t_2 = -\tau \ln 0.1 \Rightarrow t_2 = 2.3\tau$$

Tiempo de bajada: $$\boxed{t_f = t_2 - t_1 = 2.2\tau}$$

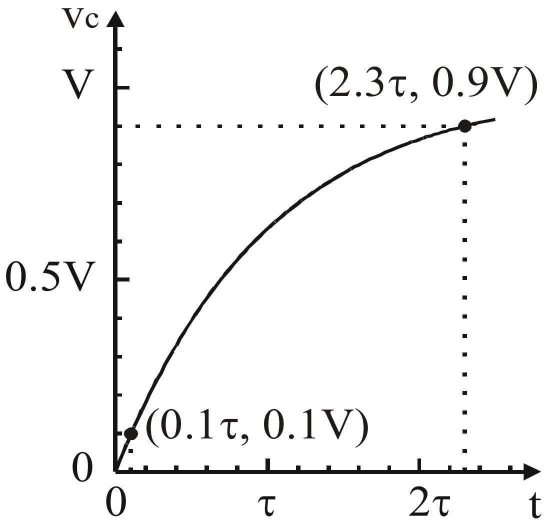
b) Carga de un condensador :



- En t < 0, interruptor conectado a tierra $\Rightarrow$ $v_C = 0$
- En t ≥ 0, interruptor conectado a la fuente V $\Rightarrow$
    - Cuando $t \to \infty$, $v_C \to V$
    - En t = 0, $v_C(0) = 0$ (la tensión en el condensador ha de mantenerse continua)
    - Entre ambas situaciones, v_C varía con el tiempo

Para t ≥ 0 : $\left.\begin{array}{l} V = iR + v_C \\ i = C\dfrac{dv_C}{dt} \end{array}\right\}$ $RC\dfrac{dv_C}{dt} + v_C = V$ $\quad \tau = RC$: Constante de tiempo del circuito

Solución: $v_C(t) = V + [v_C(0) - V]\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \boxed{v_C(t) = V\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]}$



Tiempo de subida: el que transcurre desde que la tensión pasa del 10% del valor máximo al 90% del valor máximo

$$\exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = 0.9 \Rightarrow t_1 = -\tau\ln 0.9 \Rightarrow t_1 = 0.1\tau$$

$$\exp\left(-\frac{t_2}{\tau}\right) = 0.1 \Rightarrow t_2 = -\tau\ln 0.1 \Rightarrow t_2 = 2.3\tau$$

Tiempo de subida: $\boxed{t_r = t_2 - t_1 = 2.2\tau}$

Apéndice: Solución de una ecuación diferencial de primer orden

- Ecuación: $\boxed{\tau \dfrac{dx(t)}{dt} + x(t) = K}$ ¡ K = constante !
- Condición inicial: $\boxed{x(0) = x_0}$

$$\tau \frac{dx}{dt} = K - x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x-K} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{x-K} = -\int_0^t \frac{dt'}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln(x-K)\Big|_{x(0)}^{x(t)} = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x(t)-K}{x(0)-K}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

$$x(t) - K = \left(x(0) - K\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$x(0) = x_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = K + \left(x_0 - K\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

$$K = \lim_{t\to\infty} x(t)$$