

Tema 4

- 1.- Redes Eléctricas. Leyes de Kirchhoff. Elementos de Circuito
- 2.- Métodos de Análisis de Circuitos Eléctricos
- 3.- Elementos reactivos. Respuesta transitoria

4.- Régimen Permanente Sinusoidal

- 4.1.- Conceptos fundamentales: definición de amplitud, fase, frecuencia, valor eficaz
- 4.2.- Respuesta de un circuito ante una excitación sinusoidal
- 4.3.- Formalismo de fasores. Impedancia y admitancia.
- 4.4.- Métodos de análisis y teoremas en el régimen sinusoidal estacionario
- 4.5.- Función de transferencia en el dominio de la frecuencia. Diagrama de Bode.
- 4.6.- Análisis de Fourier. Concepto de filtro.
- 4.7.- Potencia en el régimen sinusoidal permanente. Potencia activa y reactiva. Factor de potencia
- 4.8.- Acoplamiento magnético: transformador lineal.

- 5.- Análisis de Circuitos basado en la Transformada de Laplace
- 6.- Cuadripolos

4.1.- Conceptos fundamentales: amplitud, fase, frecuencia, valor eficaz

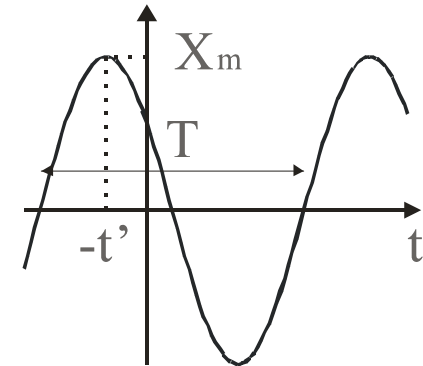
- Estudiamos en este tema los circuitos en condiciones AC: excitaciones sinusoidales aplicadas desde un tiempo suficientemente largo para que se haya alcanzado el régimen permanente o estacionario
- Importancia de estas señales: cualquier señal periódica puede descomponerse como superposición de señales sinusoidales

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- X_m = Amplitud
- ω = frecuencia angular. $\omega = 2\pi f$, con f = frecuencia. T = periodo $\Rightarrow T = \frac{1}{f}$
- φ = fase inicial o fase en el origen

$$x(t+T) = x(t) \Rightarrow \cos(\omega(t+T) + \varphi) = \cos(\omega t + \varphi)$$

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = X_m \sin(\omega t + \varphi')$$



- Valor medio: $\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt$

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X_m \cos(\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T X_m \cos(\omega t') dt' \Rightarrow \langle x(t) \rangle = 0 \quad : \text{Señal alterna}$$

- Valor eficaz: $X_{rms} = \sqrt{\langle [x(t)]^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [x(t)]^2 dt}$

$$X_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X_m^2 \cos^2(\omega t') dt'} = \sqrt{\frac{X_m^2}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t')}{2} dt'} \Rightarrow X_{rms} = \frac{X_m}{\sqrt{2}}$$

4.2.- Respuesta de un circuito ante una excitación sinusoidal

- Si el sistema es lineal se conserva la frecuencia. Las distintas magnitudes difieren en amplitud y fase. Ejemplos:

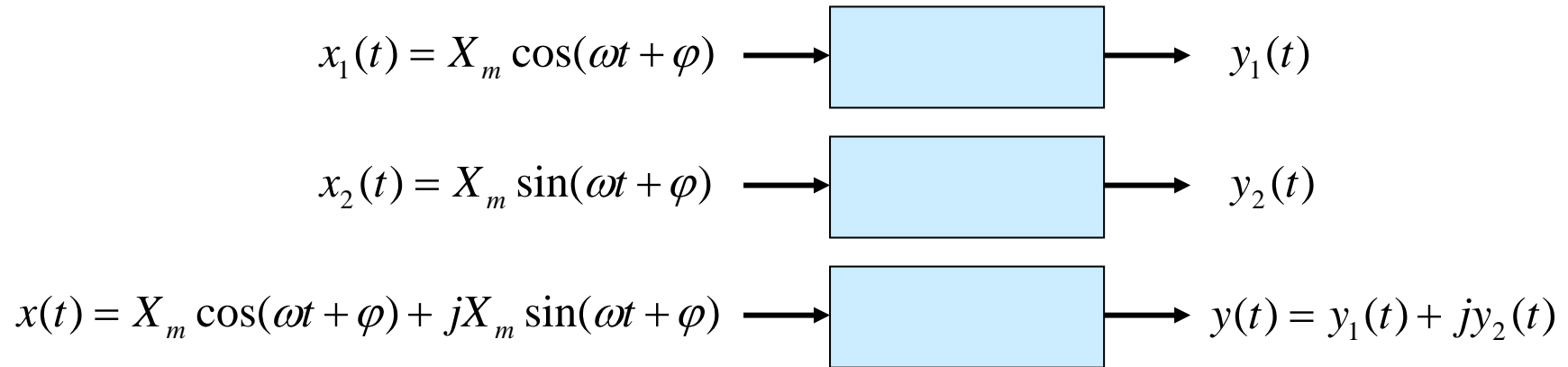
a) Resistor: $i(t) = I_m \sin \omega t \Rightarrow v(t) = i(t)R = I_m R \sin \omega t$

b) Condensador: $v(t) = V_m \sin \omega t \Rightarrow i(t) = C \frac{dv}{dt} = \omega C V_m \cos \omega t = \omega C V_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

c) Inductor: $i(t) = I_m \sin \omega t \Rightarrow v(t) = L \frac{di}{dt} = \omega L I_m \cos \omega t = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

4.3.- Formalismo de Fasores. Impedancia y admitancia

- Fasores complejos: Oliver Heaviside (1850 – 1925). Idea básica:



$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) + jX_m \sin(\omega t + \varphi) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

- Formalismo: En lugar de una onda seno o coseno, aplicamos una entrada compleja del tipo $x(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$. Obtenemos una salida $y(t) = Y_m e^{j(\omega t + \theta)}$. Como

$$\text{Re}\{y(t)\} = Y_m \cos(\omega t + \theta), \quad \text{Im}\{y(t)\} = Y_m \sin(\omega t + \theta)$$

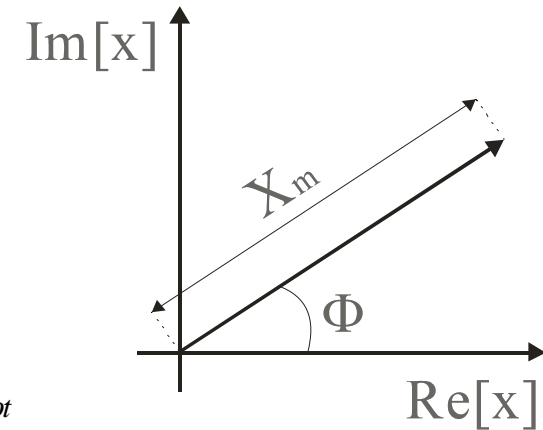
Nos quedamos con la parte real de la salida si la entrada era de tipo coseno, o con la parte imaginaria de la salida si la entrada era de tipo seno

- En general, el origen de fases se puede elegir como $\varphi = 0$, pero si ya se ha elegido nula para una magnitud, la fase de las demás nos dará el desfase relativo con respecto a ella.

- Como el factor $e^{j\omega t}$ es común a todas las magnitudes, separamos la parte temporal del resto:

$$x(t) = X_m e^{j(\omega t + \phi)} = \tilde{X} e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tilde{X} = X_m e^{j\phi}} : \text{Fasor complejo definido por su amplitud y su fase}$$



- Casos simples:

a) Resistor: $\tilde{i}(t) = I_m e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{v}(t) = \tilde{i}(t)R = I_m R e^{j\omega t}$

$$\tilde{v}(t) = \tilde{i}(t)R \quad \tilde{I} = I_m, \quad \tilde{V} = V_m \Rightarrow \tilde{V} = \tilde{I}R$$

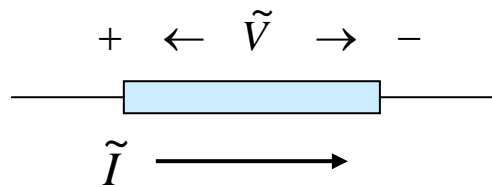
b) Condensador: $\tilde{v}(t) = V_m e^{j\omega t} \quad \tilde{i}(t) = C \frac{d\tilde{v}}{dt} = j\omega C V_m e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{i}(t) = j\omega C \tilde{v}(t)$

$$\tilde{V} = V_m \Rightarrow \tilde{I} = j\omega C V_m = j\omega C \tilde{V}$$

c) Inductor: $\tilde{i}(t) = I_m e^{j\omega t} \quad \tilde{v}(t) = L \frac{d\tilde{i}}{dt} = j\omega L I_m e^{j\omega t} \Rightarrow \tilde{v}(t) = j\omega L \tilde{i}(t)$

$$\tilde{I} = I_m \Rightarrow \tilde{V} = j\omega L I_m = j\omega L \tilde{I}$$

- **Impedancia:** Relación entre los fasores tensión y corriente de un bloque de dos terminales



$$\boxed{Z = \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}}}$$

- **Admitancia:**

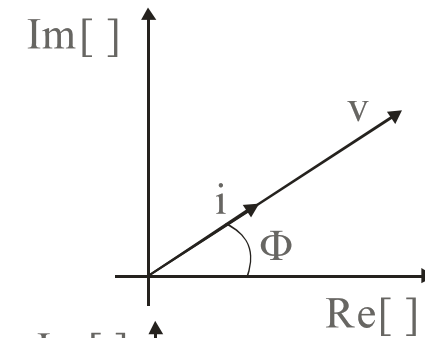
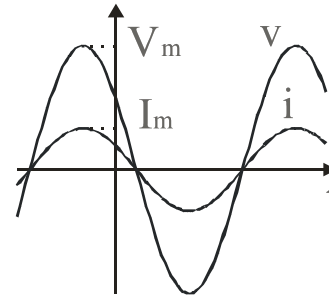
$$\boxed{Y = \frac{1}{Z} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{V}}}$$

- En general, $Z = R + jX$ con $R = \text{Resistencia}$ y $X = \text{Reactancia}$

a) Resistor:

$$\tilde{V} = \tilde{I}R \Rightarrow Z_R = R$$

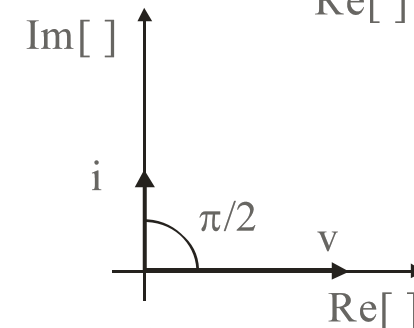
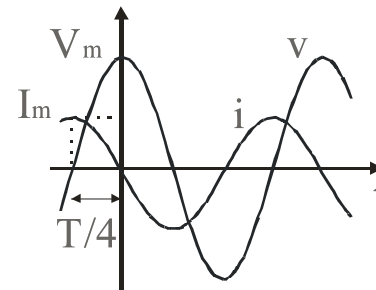
$$R_R = R, \quad X_R = 0$$



b) Condensador:

$$\tilde{I} = j\omega C\tilde{V} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

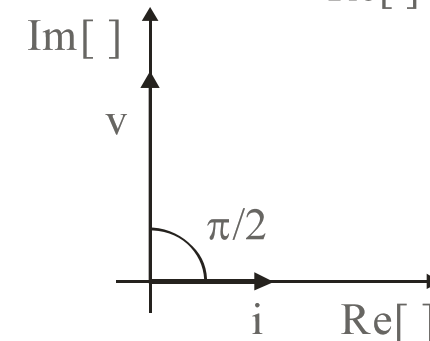
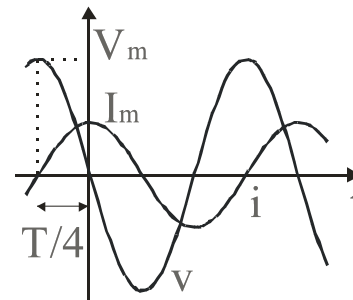
$$R_C = 0, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C}$$



c) Inductor:

$$\tilde{V} = j\omega L\tilde{I} \Rightarrow Z_L = j\omega L$$

$$R_L = 0, \quad X_L = L\omega$$



- El condensador y el inductor ideales son elementos reactivos puros
- Los resistores, condensadores e inductores reales tienen tanto componente resistiva como reactiva. Cada componente domina en un rango específico de frecuencias

4.4.- Métodos de análisis y teoremas en el régimen sinusoidal estacionario

Procedimiento de análisis:

- 1) Si las fuentes independientes son de distintas frecuencias, se aplica el principio de superposición, seleccionando las de una misma frecuencia y anulando las demás
- 2) Si las fuentes independientes son de la misma frecuencia, se asigna un fasor a cada fuente. La fase de una de las fuentes puede elegirse cero, y la de las demás sería el desfase con respecto a la fuente de referencia
- 3) Se representa cada elemento por su impedancia a la frecuencia dada \Rightarrow la tensión y la corriente resultan así proporcionales
- 4) Se plantean las ecuaciones del circuito, que resultan ser algebraicas
- 5) Se resuelven las ecuaciones, obteniendo los fasores para las magnitudes de salida
- 6) A partir de los fasores de salida, se obtienen las dependencias temporales
- 7) Se repite para cada frecuencia, sumando las respuestas **en el dominio del tiempo**

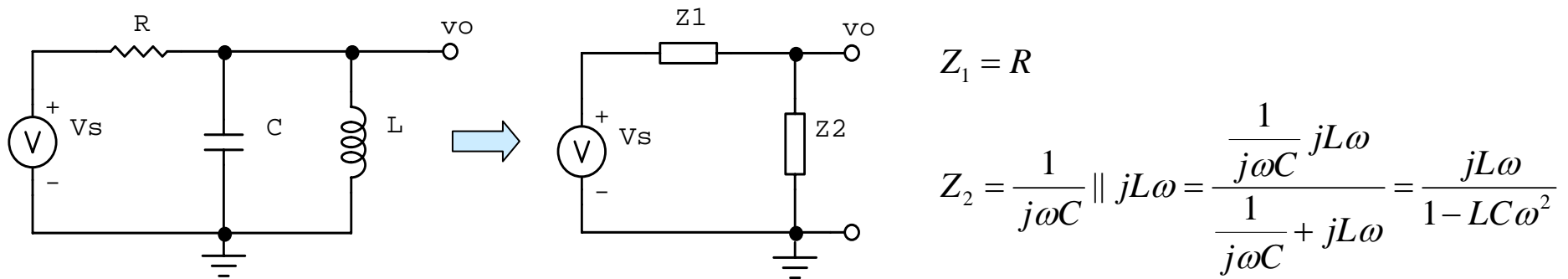
• Ejemplo: $x(t) = X_m \sin(\omega t) \rightarrow \tilde{X} = X_m \rightarrow \tilde{Y} = Y_m e^{j\phi} \rightarrow y(t) = Y_m \sin(\omega t + \phi)$

• En el contexto de líneas eléctricas o sistemas eléctricos (motores, ...): $\tilde{X} = X_{rms} e^{j\phi} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} e^{j\phi}$

$$x(t) = X_m \sin(\omega t) \rightarrow \tilde{X} = X_{rms} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \rightarrow \tilde{Y} = Y_{rms} e^{j\phi} \rightarrow y(t) = \sqrt{2} Y_m \sin(\omega t + \phi)$$

- Al haber llegado a una relación de proporcionalidad entre la tensión que soporta cualquier elemento y la corriente que lo atraviesa en el dominio de los fasores complejos, todos los teoremas y métodos que hemos aplicado en condiciones de corriente continua son igualmente aplicables en el régimen sinusoidal estacionario (asociaciones de impedancias, teoremas de Thèvenin y Norton, métodos de análisis de las corrientes en las mallas y las tensiones en los nudos, etc...)

Ejemplo: Cálculo de v_o en el circuito de la figura con $v_s = V_m \cos \omega t$



$$\tilde{V}_o = \tilde{V}_s \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow \tilde{V}_o = \tilde{V}_s \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} = \tilde{V}_s \frac{jL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} = \tilde{V}_s \frac{\frac{jL\omega}{R}}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}}$$

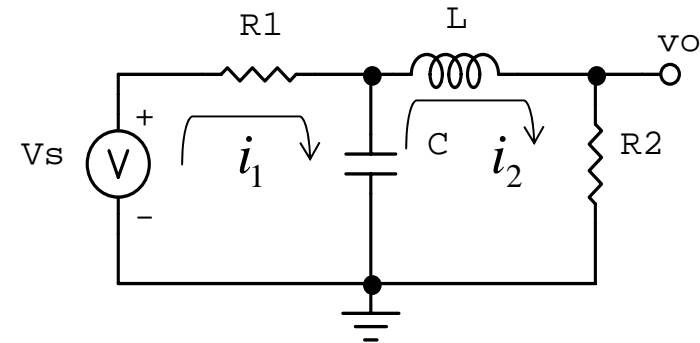
$$\tilde{V}_s = V_m \Rightarrow \tilde{V}_o = \frac{V_m \frac{L\omega}{R}}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \left(\frac{L\omega}{R}\right)^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\frac{L\omega}{R}}{1 - LC\omega^2} \right) \right]$$

Ejemplo: Cálculo de v_o en el circuito de la figura con $v_s = V_m \cos \omega t$

Datos: $f=50000$ Hz, $V_m=10$ V, $C=100$ nF, $R_1=100$ Ω , $L=1$ mH, $R_2=10$ k Ω .

$$\tilde{V}_s = \tilde{I}_1 \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) - \tilde{I}_2 \frac{1}{j\omega C} \quad \tilde{V}_o = \tilde{I}_2 R_2$$

$$0 = -\tilde{I}_1 \frac{1}{j\omega C} + \tilde{I}_2 \left(R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right)$$



$$\tilde{I}_2 = \frac{\tilde{V}_s \left(\frac{1}{j\omega C} \right)}{\left(R_1 + \frac{1}{j\omega C} \right) \left(R_2 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) - \left(\frac{1}{j\omega C} \right)^2} \Rightarrow \tilde{I}_2 = \frac{j\omega C \tilde{V}_s}{-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2 + j\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)}$$

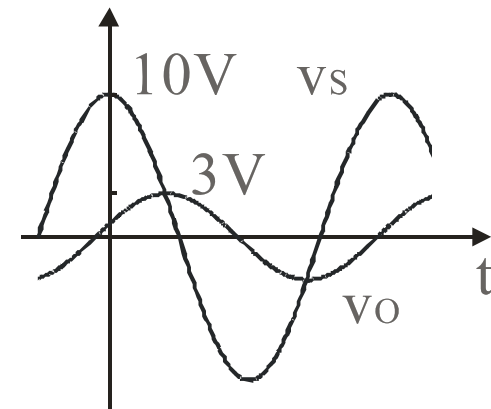
$$\omega C R_2 V_m \exp \left\{ j \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)}{-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2} \right) \right] \right\}$$

$$\tilde{V}_o = \tilde{I}_2 R_2 = \frac{j\omega C R_2 \tilde{V}_s}{-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2 + j\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)} = \frac{\omega C R_2 V_m \exp \left\{ j \left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)}{-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2} \right) \right] \right\}}{\sqrt{[-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2]^2 + [\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)]^2}}$$

$$|\tilde{V}_o| = \frac{\omega C R_2 V_m}{\sqrt{[-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2]^2 + [\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)]^2}} = 3.03 \text{ V}$$

$$\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left(\frac{\omega C R_1 (-\omega^2 LC + 1 + R_2 / R_1)}{-\omega^2 LC - \omega^2 C^2 R_1 R_2} \right) = \frac{\pi}{2} - 2.862 = -1.29 \text{ rad}$$

$$\tilde{V}_o = 3.03 e^{-j1.29} \text{ V} \rightarrow v_o(t) = 3.03 \cos(\omega t - 1.29) \text{ V}$$



4.5.- Función de transferencia en el dominio de la frecuencia.

Diagrama de Bode

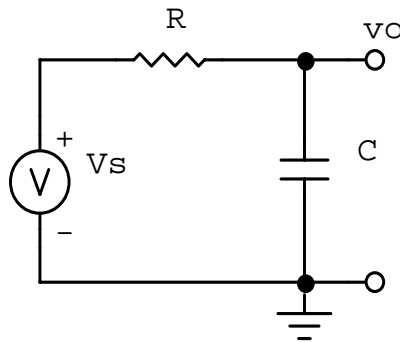
➤ Definida una fuente externa como variable de entrada y otra magnitud (tensión o corriente) como variable de salida, la relación entre los fasores de salida y entrada, a la frecuencia dada, será un número complejo. Si cambia la frecuencia de la fuente de entrada, cambiará el valor de ese número \Rightarrow Definimos la función de transferencia como la relación entre los fasores de salida y de entrada en función de la frecuencia de la entrada



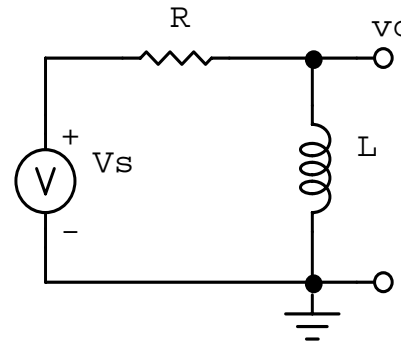
$$T(\omega) = \frac{\tilde{Y}}{\tilde{X}}$$

$$\tilde{X} = X_m e^{j\varphi_x}, \quad T(\omega) = |T(\omega)| e^{j\varphi_T} \quad \Rightarrow \quad \tilde{Y} = |T(\omega)| X_m e^{j(\varphi_x + \varphi_T)}$$

Ejemplos:



$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

- **Diagrama de Bode:** Conjunto de dos gráficos en los que se representan el módulo y la fase de la función de transferencia, con las siguientes características:

1) Se usa escala logarítmica para el eje de abscisas \Rightarrow se representa el logaritmo decimal de la frecuencia: $\log(f)$ o $\log(\omega)$. Su unidad es la “década”.

2) También se representa el módulo de la función de transferencia en escala logarítmica. Su unidad es el **decibelio**:

$$|T(\omega)|_{dB} = 20\log|T(\omega)| = 20\log\left|\frac{Y}{X}\right| \quad \text{si la función de transferencia se define como cociente de señales}$$

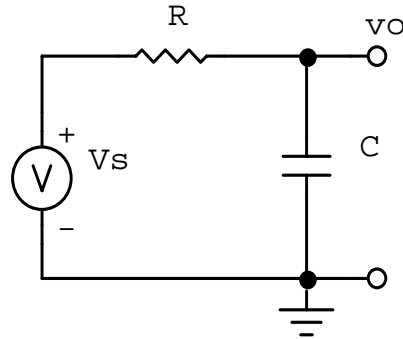
$$|T(\omega)|_{dB} = 10\log\left|\frac{P_{out}}{P_{in}}\right| \quad \text{si la función de transferencia se define como cociente de potencias}$$

$$\left. \begin{array}{l} \left|\frac{Y}{X}\right| = 0.1 \Rightarrow |T(\omega)|_{dB} = 20\log(0.1) = -20 \text{ dB} \\ \left|\frac{Y}{X}\right| = 0.01 \Rightarrow |T(\omega)|_{dB} = 20\log(0.01) = -40 \text{ dB} \end{array} \right\} < 0 \Rightarrow \text{Atenuación}$$

$$\left|\frac{Y}{X}\right| = 1 \Rightarrow |T(\omega)|_{dB} = 20\log(1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \left|\frac{Y}{X}\right| = 10 \Rightarrow |T(\omega)|_{dB} = 20\log(10) = 20 \text{ dB} \\ \left|\frac{Y}{X}\right| = 100 \Rightarrow |T(\omega)|_{dB} = 20\log(100) = 40 \text{ dB} \end{array} \right\} > 0 \Rightarrow \text{Amplificación}$$

Ejemplo 1:



$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

$$\omega \ll \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx 1 = 1[0]$$

$$\Rightarrow 20 \log |T(\omega)| \approx 0, \quad \varphi_T \approx 0$$

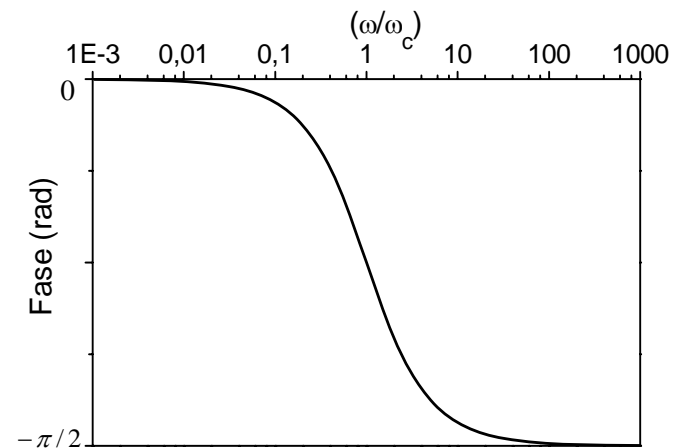
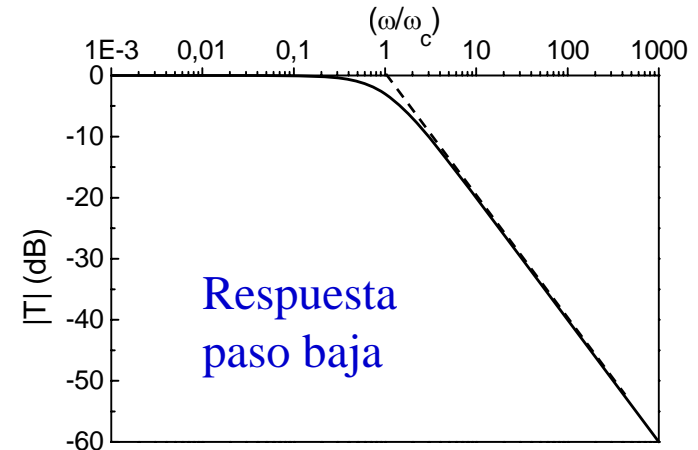
$$\omega \gg \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{\omega_c}{\omega} \left[-\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow 20 \log |T(\omega)| \approx 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega), \quad \varphi_T \approx -\frac{\pi}{2}$$

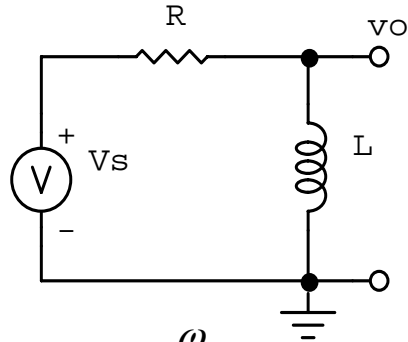
(recta de pendiente -20 dB/década)

$$\omega = \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-\frac{\pi}{4} \right]$$

$$\Rightarrow 20 \log |T(\omega)| = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}, \quad \varphi_T \approx -\frac{\pi}{4}$$



Ejemplo 2:



$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{R}{L}$$

$$\omega \gg \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx 1 = 1[0]$$

$$\Rightarrow 20 \log|T(\omega)| \approx 0, \quad \varphi_T \approx 0$$

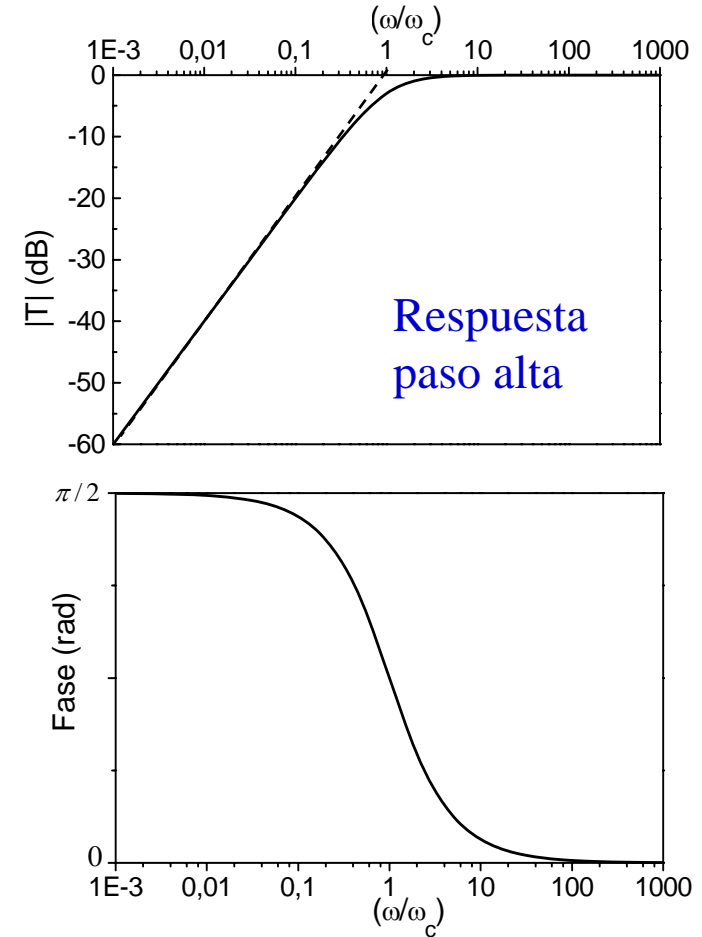
$$\omega \ll \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx j \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\omega}{\omega_c} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\Rightarrow 20 \log|T(\omega)| \approx 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_c), \quad \varphi_T \approx \frac{\pi}{2}$$

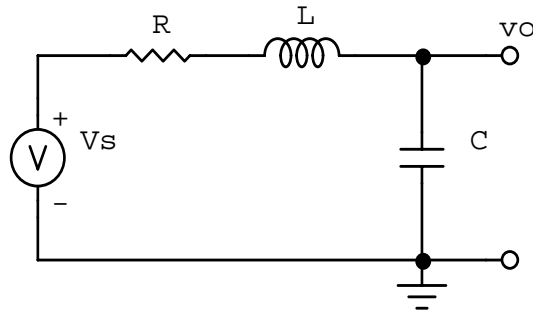
(recta de pendiente +20 dB/década)

$$\omega = \omega_c \Rightarrow T(\omega) = \frac{j}{1 + j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\pi}{4} \right]$$

$$\Rightarrow 20 \log|T(\omega)| = -20 \log(\sqrt{2}) = -3 \text{ dB}, \quad \varphi_T \approx +\frac{\pi}{4}$$



Ejemplo 3:



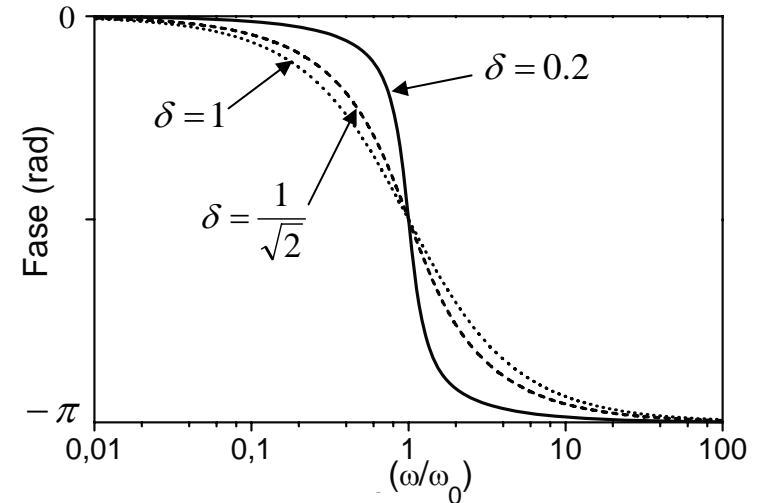
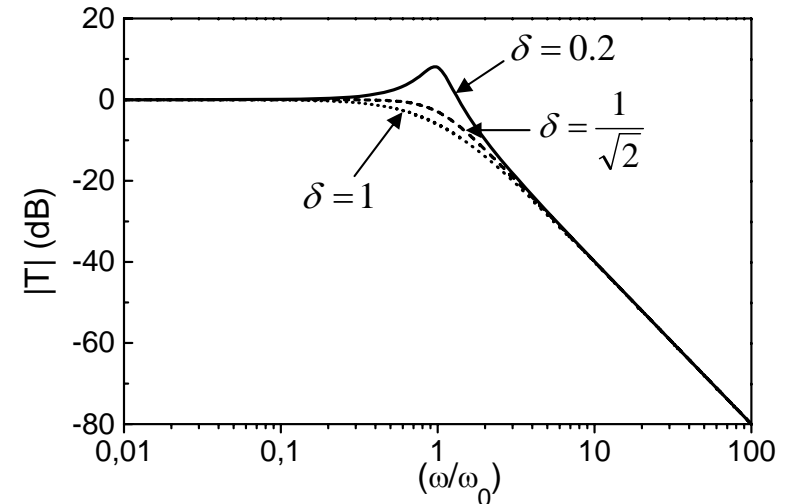
$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\omega RC}$$

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta \equiv \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \Rightarrow T(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}$$

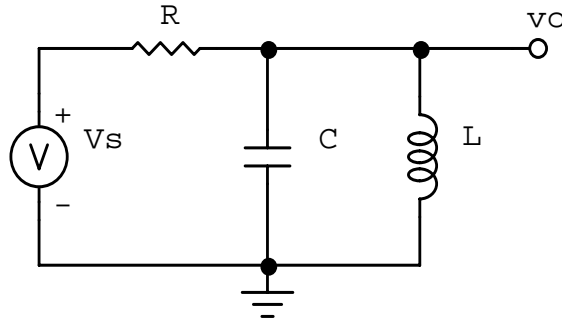
Frecuencia de resonancia

- **Asíntotas:** $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow T(\omega) \approx 1 = 1[0]$
 $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow T(\omega) \approx -\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}[\pi]$
 $\Rightarrow 20 \log|T(\omega)| \approx 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$
 (Recta de pendiente -40 dB/década)

- **Máximo:** $|T(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$, $\left. \frac{d|T(\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega_{\max}} = 0$
 $\delta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_{\max} = 0, \quad T_{\max} = 1$
 $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad T_{\max} = \frac{1}{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}$



Ejemplo 4:



$$T(\omega) = \frac{jL\omega}{R} \cdot \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{jL\omega}{R}} = \frac{j2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \delta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases}$$

• Máximo en $\omega = \omega_0$: $T(\omega_0) = 1$

• Asíntotas: $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow T(\omega) \approx j2\delta \frac{\omega}{\omega_0}$

$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow T(\omega) \approx -j2\delta \frac{\omega_0}{\omega}$

$|T(\omega)| \approx$ Rectas de pendiente +20 dB/década y -20 dB/década que se cortan en $20\log(2\delta)$

• Ancho de banda:

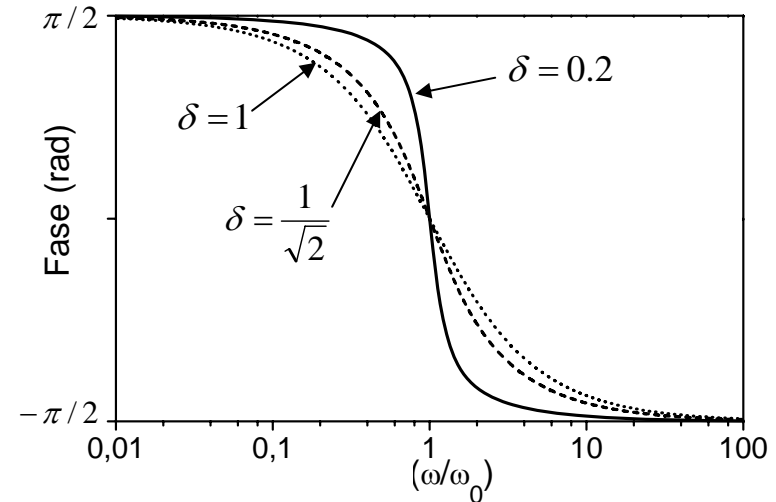
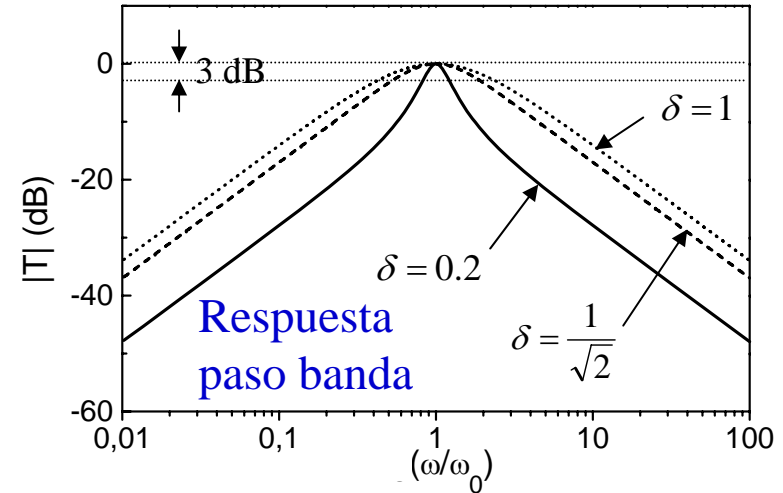
$$|T(\omega)| = \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

\Rightarrow Dos soluciones: ω_L y ω_H

Si $\delta \ll 1 \Rightarrow \omega_L \approx \omega_0(1 - \delta)$, $\omega_H \approx \omega_0(1 + \delta)$

$$\frac{BW}{\omega_0} = \frac{\omega_H - \omega_L}{\omega_0} = 2\delta = \frac{1}{Q}, \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Q = Factor de calidad



4.6.- Análisis de Fourier. Concepto de Filtro

“Cualquier señal periódica puede descomponerse como una serie de funciones sinusoidales”

- Si $x(t)$ es una señal periódica de periodo T , tal que $x(t+T) = x(t)$

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad f_0 \equiv \frac{1}{T}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A las componentes sinusoidales se les llama armónicos de la señal, y al primero de ellos, con frecuencia f_0 igual que la de la señal $x(t)$ se le llama armónico fundamental.

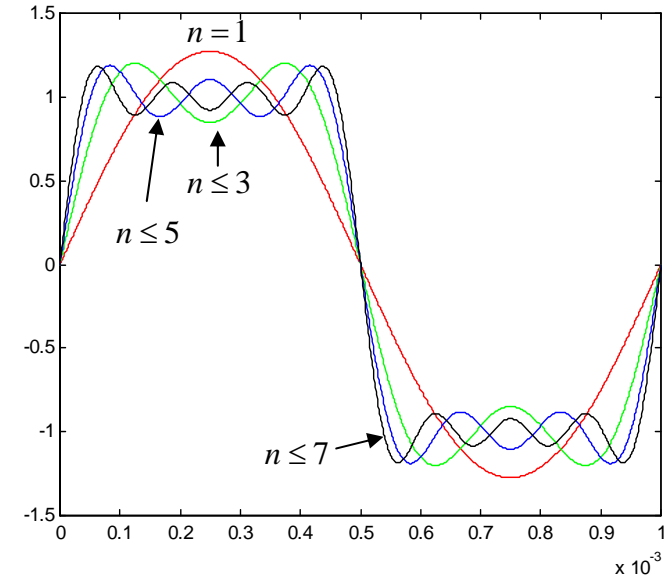
- Otras formas de expresar el mismo resultado:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad C_0 = \langle x(t) \rangle, \quad C_n = |C_n| e^{j\phi_n}, \quad C_{-n} = C_n^*$$

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\omega_0 t)$$

- Ejemplo: Señal cuadrada

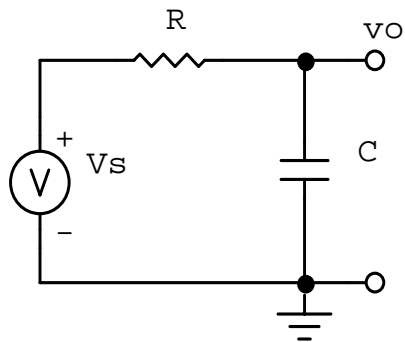
$$x(t) = \frac{4}{\pi} X_m \left[\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \frac{\sin(7\omega_0 t)}{7} + \dots \right]$$



- **Filtro**: Circuito que actúa de forma selectiva sobre las distintas componentes armónicas de una señal, según sea su frecuencia. Puede ser:

- a) Paso baja
- b) Paso alta
- c) Paso banda
- d) Elimina banda

- **Ejemplo**:



$$v_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Señal periódica,} \\ \text{no armónica} \end{array} \right.$$

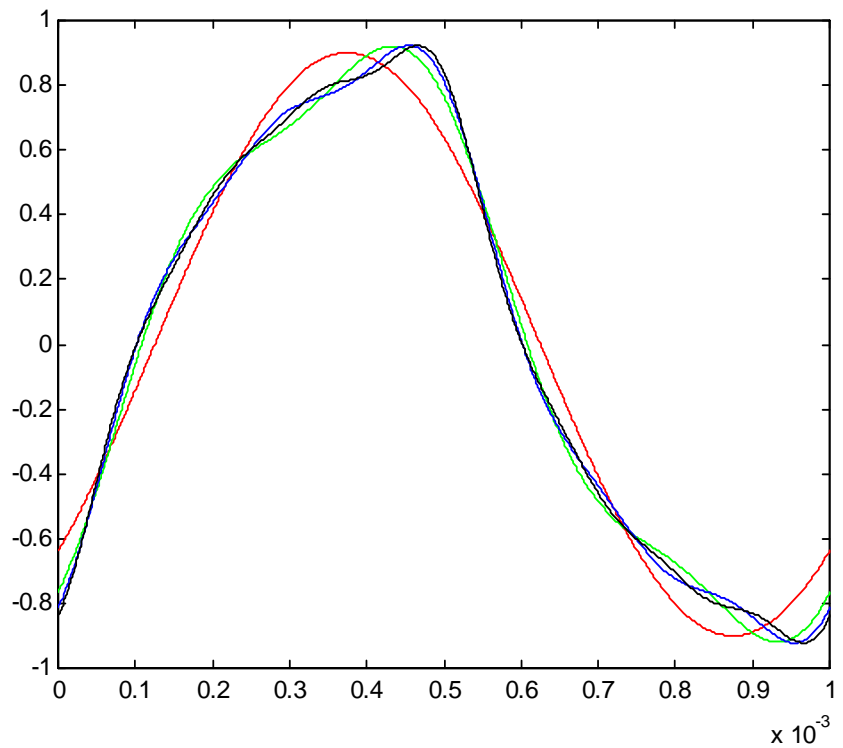
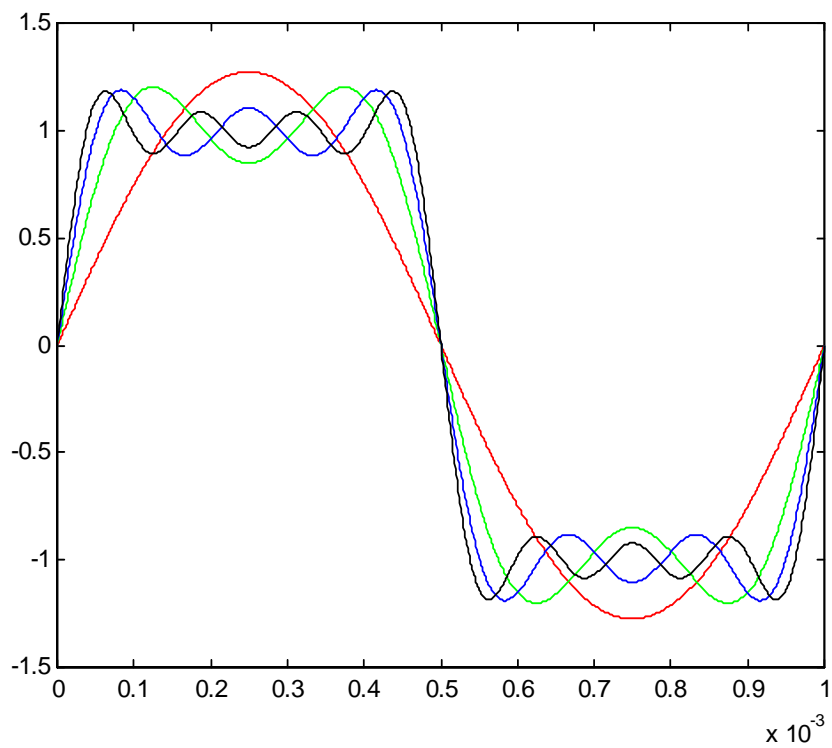
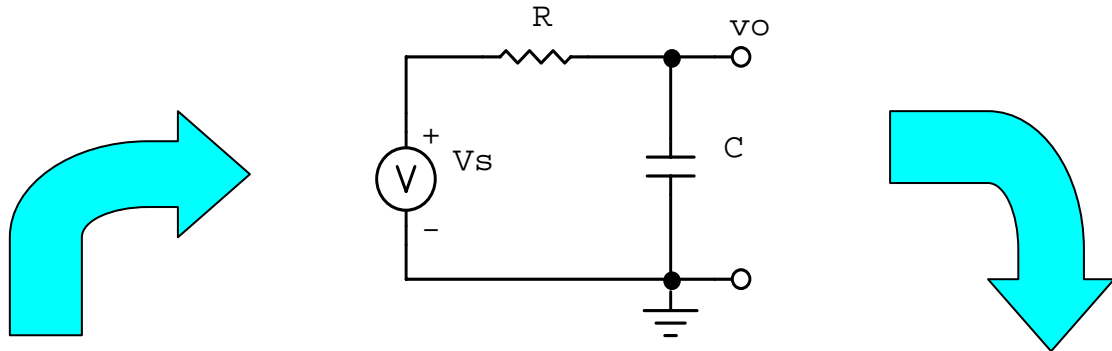
$$T(\omega) = \frac{\tilde{V}_o}{\tilde{V}_s} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{con} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Aplicamos el principio de superposición: Si suponemos que sólo actúa el armónico n-ésimo,

$$\tilde{V}_{on} = T(n\omega_0) V_n e^{j\phi_n} = \frac{1}{1 + j \frac{n\omega_0}{\omega_c}} V_n e^{j\phi_n} = \frac{V_n}{\sqrt{1 + n^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} \left[\phi_n - \tan^{-1} \left(\frac{n\omega_0}{\omega_c} \right) \right]$$

$$v_o(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{on}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n}{\sqrt{1 + n^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} \sin(n\omega_0 t + \theta_n) \quad \text{con} \quad \theta_n = \phi_n - \tan^{-1} \left(\frac{n\omega_0}{\omega_c} \right)$$

Entrada onda cuadrada y filtro con $\omega_C = \omega_0$:



4.7.- Potencia en el régimen sinusoidal permanente. Potencia activa y reactiva. Factor de potencia

• Potencia instantánea: $p(t) = i(t)v(t)$

• Potencia media o activa: $P = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)v(t)dt$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t), \quad i(t) = I_m \cos(\omega t - \theta) \Rightarrow p(t) = I_m V_m \cos(\omega t) \cos(\omega t - \theta)$$

$$p(t) = I_m V_m [\cos^2(\omega t) \cos \theta + \cos(\omega t) \sin(\omega t) \sin \theta] \quad \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} I_m V_m \cos \theta \Rightarrow \boxed{P = I_{rms} V_{rms} \cos \theta} \quad \underline{\cos \theta = \text{Factor de potencia}}$$

• Con fasores:

Definimos el fasor Potencia Aparente: $\tilde{S} = \frac{1}{2} \tilde{I}^* \tilde{V} \Rightarrow \tilde{S} = \frac{1}{2} I_m V_m e^{j\theta} = I_{rms} V_{rms} e^{j\theta}$

$$\left(\text{Si } \tilde{V} = V_{rms}, \quad \tilde{I} = I_{rms} e^{-j\theta} \Rightarrow \tilde{S} = \tilde{I}^* \tilde{V} \right)$$

Potencia activa: $P = \text{Re}[\tilde{S}] = I_{rms} V_{rms} \cos \theta$

Potencia reactiva: $Q = \text{Im}[\tilde{S}] = I_{rms} V_{rms} \sin \theta$

-
- Resistor: $\theta = 0 \Rightarrow P = I_{rms} V_{rms}, \quad Q = 0$
 - Condensador: $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0, \quad Q = -I_{rms} V_{rms}$
 - Inductor: $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow P = 0, \quad Q = I_{rms} V_{rms}$

4.7.- Acoplamiento magnético. Transformador lineal

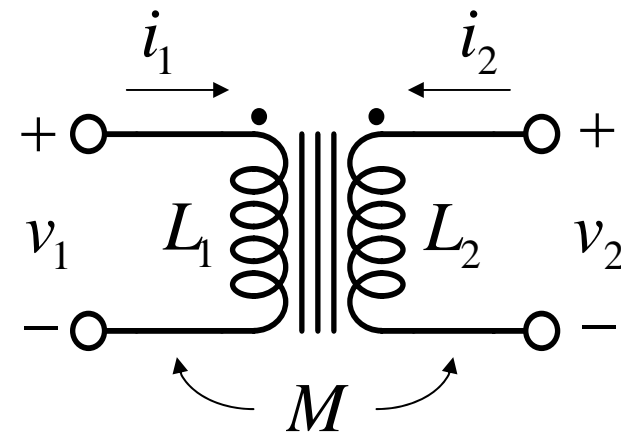
- Existe acoplamiento magnético entre dos o más inductores que comparten un núcleo común: la corriente que circula por uno de ellos genera un campo magnético en el interior del núcleo. Si el flujo de ese campo magnético es variable en el tiempo, induce una diferencia de potencial en los demás inductores
- El elemento resultante del acoplamiento de dos o más inductores se llama transformador
- El transformador es lineal si las características de su núcleo no dependen del valor del campo magnético que fluye en su interior

• Modelo:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad M = k\sqrt{L_1 L_2} \quad k \leq 1$$

$$v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2^2}{N_1^2} = n^2$$

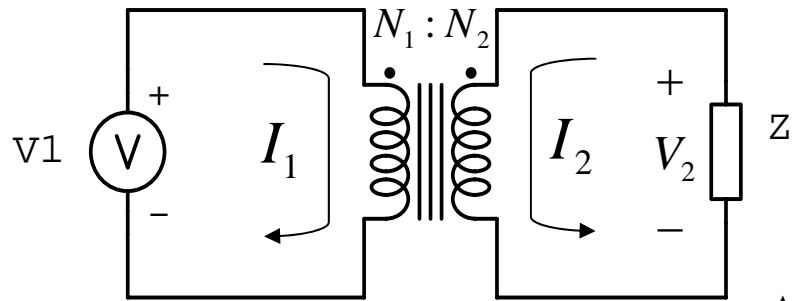
Transformador sin pérdidas de flujo: $k = 1$



• Con fasores:

$$\tilde{V}_1 = jL_1\omega\tilde{I}_1 + jM\omega\tilde{I}_2$$

$$\tilde{V}_2 = jL_2\omega\tilde{I}_2 + jM\omega\tilde{I}_1$$



$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 &= -\tilde{I}_2 Z \\ \tilde{V}_1 &= jL_1 \omega \tilde{I}_1 + jM \omega \tilde{I}_2 \\ -\tilde{I}_2 Z &= jL_2 \omega \tilde{I}_2 + jM \omega \tilde{I}_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{V}_1 &= jL_1 \omega \tilde{I}_1 + jM \omega \tilde{I}_2 \\ 0 &= jM \omega \tilde{I}_1 + (jL_2 \omega + Z) \tilde{I}_2 \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} jL_1 \omega & jM \omega \\ jM \omega & jL_2 \omega + Z \end{vmatrix} = jL_1 \omega (jL_2 \omega + Z) + (M \omega)^2 = -L_1 L_2 \omega^2 (1 - k^2) + jL_1 \omega Z$$

$$\tilde{I}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \tilde{V}_1 & jM \omega \\ 0 & jL_2 \omega + Z \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\tilde{V}_1 (jL_2 \omega + Z)}{-L_1 L_2 \omega^2 (1 - k^2) + jL_1 \omega Z} \quad \tilde{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} jL_1 \omega & \tilde{V}_1 \\ jM \omega & 0 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-j\tilde{V}_1 M \omega}{-L_1 L_2 \omega^2 (1 - k^2) + jL_1 \omega Z}$$

• Transformador sin pérdidas: $k = 1 \Rightarrow \tilde{I}_1 = \frac{\tilde{V}_1 (jL_2 \omega + Z)}{jL_1 \omega Z} \quad \tilde{I}_2 = \frac{-\tilde{V}_1 M \omega}{L_1 \omega Z}$

$$\tilde{V}_2 = -\tilde{I}_2 Z = \frac{\tilde{V}_1 M}{L_1} = \frac{\tilde{V}_1 \sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = \tilde{V}_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \Rightarrow \frac{\tilde{V}_2}{\tilde{V}_1} = \frac{N_2}{N_1} = n$$

• Transformador ideal:

$$k = 1, \quad |jL_2 \omega| \gg |Z| \Rightarrow \tilde{I}_1 \approx \frac{\tilde{V}_1 L_2}{L_1 Z} \quad \tilde{I}_2 = \frac{-\tilde{V}_1 M}{L_1 Z} \Rightarrow -\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{n}$$

• Impedancia vista desde el primario en un transformador ideal:

$$Z_1 \equiv \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{I}_1} = \frac{L_1}{L_2} Z = \frac{Z}{n^2}$$