Tema 5

1.- Redes Eléctricas. Leyes de Kirchhoff. Elementos de Circuito
2.- Métodos de Análisis de Circuitos Eléctricos
3.- Elementos reactivos. Respuesta transitoria
4.- Régimen Permanente Sinusoidal

5.- Análisis de Circuitos basado en la Transformada de Laplace

5.1.- Transformada de Laplace. Relaciones tensión-corriente en elementos lineales. Leyes de Kirchhoff y teoremas en el dominio de Laplace.
5.2.- Análisis basado en la transformada del circuito.
5.3.- Aplicación de la transformada de Laplace al análisis de circuitos en régimen transitorio: transformada inversa. Circuitos de primer y segundo orden.
5.4.- Función de transferencia en el dominio de Laplace. Información que proporciona.

6.- Cuadripolos

5.1.- Transformada de Laplace. Relaciones tensión-corriente en elementos lineales. Leyes de Kirchhoff y teoremas en el dominio de Laplace

- Definición: Transformada de Laplace

$$\boxed{x(t) \rightarrow L[x(t)] = X(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt} \qquad \boxed{s = \sigma + j\omega}$$

- Propiedad importante:

$$L[x(t)] = X(s) \quad \Rightarrow \quad L\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) \quad , \quad L\left[\int_0^t x(t')dt'\right] = \frac{X(s)}{s}$$

$\Rightarrow$ Permite transformar las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas

- Algunas transformadas de interés:

a) Función escalón unidad: $u(t) = \begin{cases} 0\,, & t \leq 0 \\ 1\,, & t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad L[u(t)] = \dfrac{1}{s}$

b) Función impulso unidad:

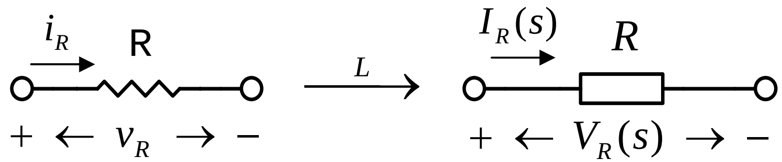
$$\delta(t) = \begin{cases} 0\,, & t \neq 0 \\ \infty\,, & t = 0 \end{cases} \quad con \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad , \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad L[\delta(t)] = 1$$

c) Función exponencial: $L[e^{at}] = \dfrac{1}{s-a}$

• Relación tensión-corriente en los elementos lineales de dos terminales

a) Resistor: $v_R(t) = Ri_R(t) \quad \Rightarrow \quad V_R(s) = RI_R(s)$

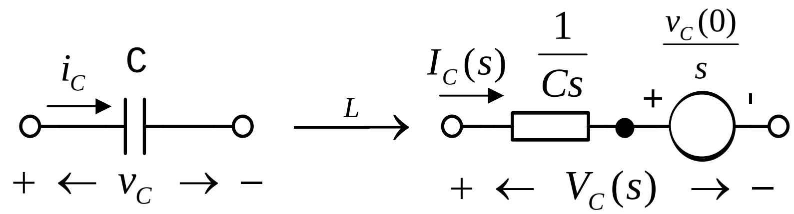
$$Z_R \equiv R \quad \Rightarrow \quad V_R(s) = I_R(s) Z_R$$



b) Condensador:

$$i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad I_C(s) = CsV_C(s) - Cv_C(0)$$

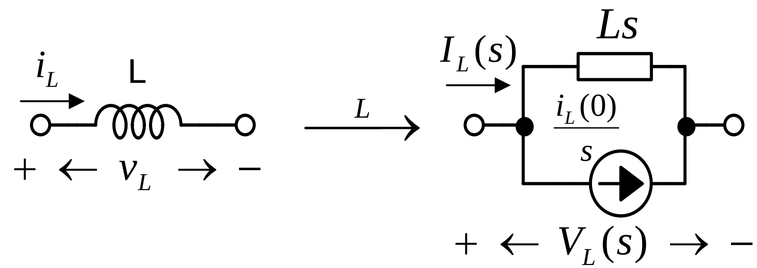
$$Z_C \equiv \frac{1}{Cs} \quad \Rightarrow \quad V_C(s) = I_C(s)Z_C + \frac{v_C(0)}{s}$$



c) Inductor:

$$v_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad V_L(s) = LsI_L(s) - Li_L(0)$$

$$Z_L \equiv Ls \quad \Rightarrow \quad I_L(s) = \frac{V_L(s)}{Z_L} + \frac{i_L(0)}{s}$$



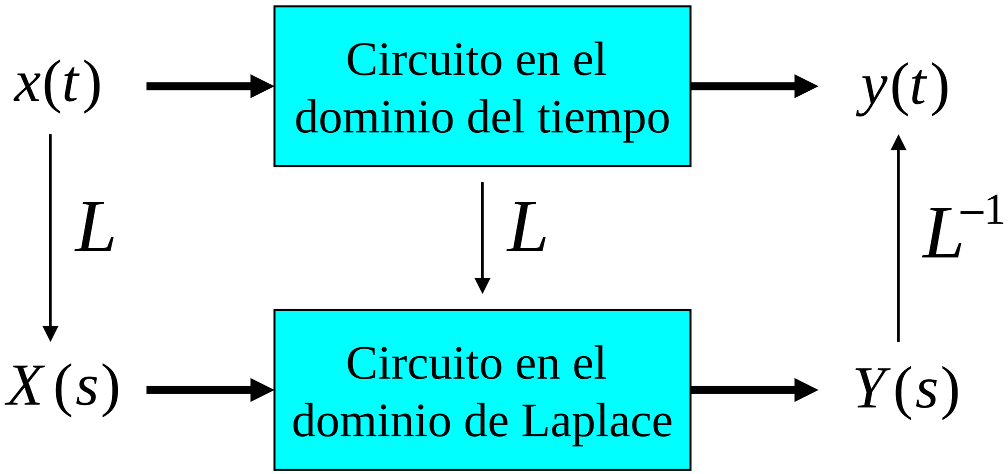
• Leyes de Kirchhoff:

$$\boxed{\sum_i^{malla} \Delta v_i = 0 \xrightarrow{L} \sum_i^{malla} \Delta V_i(s) = 0}$$

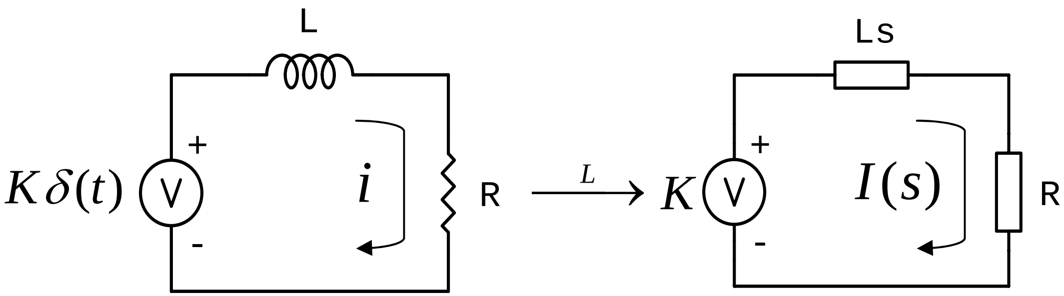
$$\boxed{\sum_j^{nudo} i_j = 0 \xrightarrow{L} \sum_i^{nudo} I_j(s) = 0}$$

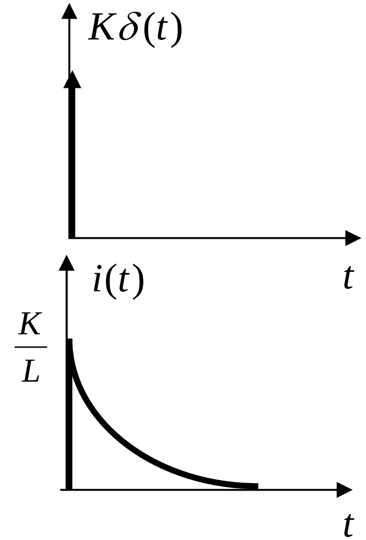
$\Rightarrow$ { Los teoremas y métodos de análisis estudiados en los temas anteriores son aplicables también en el dominio transformado

5.2.- Análisis basado en la transformada del circuito



• Ejemplo: Cálculo de la corriente en el circuito de la figura con una entrada tipo impulso





$$i(0) = 0$$

$$L[K\delta(t)] = K$$

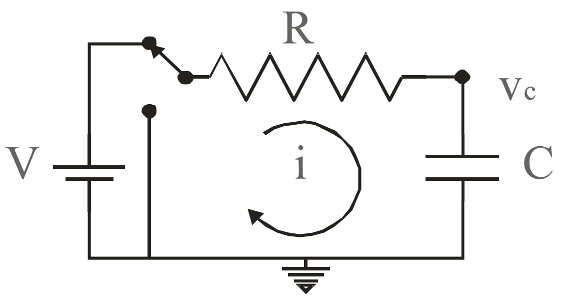
$$I(s) = \frac{K}{Ls + R} = \frac{K}{L}\frac{1}{s + \frac{R}{L}} \quad \Rightarrow \quad i(t) = L^{-1}[I(s)] = \frac{K}{L}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$\Rightarrow$ Surge una discontinuidad en la corriente del inductor porque la entrada es un impulso infinito

5.3.- Aplicación de la transformada de Laplace al análisis de circuitos en régimen transitorio

A) Circuitos de primer orden:

- Ejemplo 1: Carga de un condensador



- En t < 0, interruptor conectado a tierra $\Rightarrow$ $v_C = 0$
- En t ≥ 0, interruptor conectado a la fuente V $\Rightarrow$

$$Vu(t) = iR + v_C \quad \Rightarrow \quad \frac{V}{s} = I(s)R + I(s)\frac{1}{Cs}$$

$$V_C(s) = I(s)\frac{1}{Cs} = \frac{V/s}{R+\frac{1}{Cs}}\frac{1}{Cs} = \frac{V}{s(RCs+1)} = \frac{V}{RC}\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

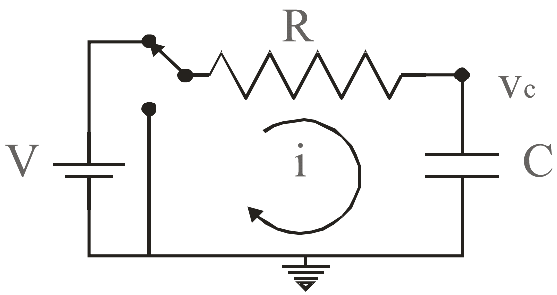
$$\frac{1}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \frac{RC}{s} - \frac{RC}{s+\frac{1}{RC}} \quad \Rightarrow \quad V_C(s) = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right)$$

Calculamos la transformada inversa:

$$\boxed{v_C(t) = L^{-1}\left[V_C(s)\right] = V\left(u(t) - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \Rightarrow \quad v_C(t) = V\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad , \quad t > 0}$$

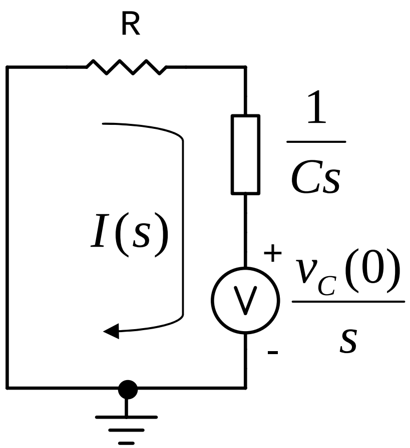
A) Circuitos de primer orden:

- Ejemplo 2: Descarga de un condensador



- En t < 0, interruptor conectado a la fuente V $\Rightarrow$ $v_C = V$
- En t $\geq$ 0, interruptor conectado a tierra $\Rightarrow$

$$t > 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = I(s)R + I(s)\frac{1}{Cs} + \frac{v_C(0)}{s} \quad , \quad v_C(0) = V$$



$$-\frac{V}{s} = I(s)\left(R + \frac{1}{Cs}\right) \quad \Rightarrow \quad I(s) = \frac{-\frac{V}{s}}{R + \frac{1}{Cs}}$$

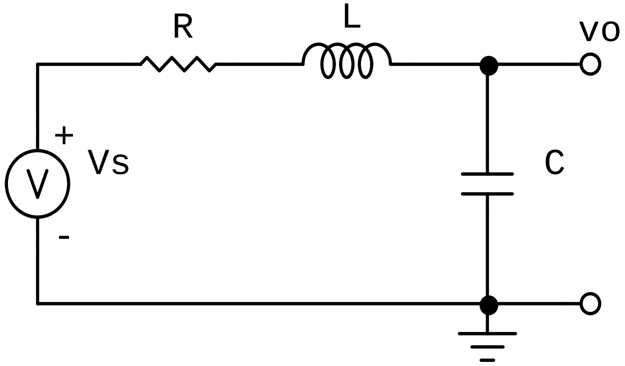
$$V_C(s) = -I(s)R \quad \Rightarrow \quad V_C(s) = \frac{\frac{V}{s}}{R + \frac{1}{Cs}} R = \frac{VRC}{RCs + 1} = \frac{V}{s + \frac{1}{RC}}$$

Calculamos la transformada inversa:

$$\boxed{v_C(t) = L^{-1}\left[V_C(s)\right] = Ve^{-\frac{t}{RC}} \quad , \quad t > 0}$$

B) Circuitos de segundo orden:

- Ejemplo: Respuesta de un circuito RLC a una entrada escalón



$$v_S(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \le 0 \\ V & , \quad t > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v_S(t) = V u(t)$$

$$i(0) = 0 \quad , \quad v_C(0) = 0$$

$$\frac{V}{s} = I(s)\left[R + Ls + \frac{1}{Cs}\right] \quad , \quad V_O(s) = I(s)\frac{1}{Cs} \quad \Rightarrow \quad V_O(s) = \frac{\frac{V}{s}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}}\frac{1}{Cs} = \frac{V}{s\left(LCs^2 + RCs + 1\right)}$$

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta \equiv \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \Rightarrow \quad V_O(s) = \frac{V}{s\left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\delta\frac{s}{\omega_0} + 1\right)} = \frac{V\omega_0^2}{s\left(s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2\right)}$$

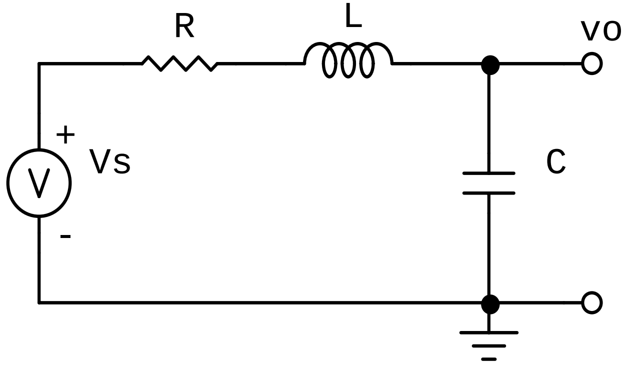
Raíces del denominador:

$$s = 0 \quad , \quad s^2 + 2\delta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0 \quad , \quad \left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\omega_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V_O(s) = \frac{V\omega_0^2}{s\left(s - s_1\right)\left(s - s_2\right)}$$

$$s_1 s_2 = \omega_0^2 \quad , \quad s_1 - s_2 = -2\omega_0\sqrt{\delta^2 - 1}$$

Respuesta de un circuito RLC a una entrada escalón:



$$\boxed{V_O(s) = \frac{V\omega_0^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}}$$

$$\left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\omega_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right)$$

$$s_1 s_2 = \omega_0^2 \quad , \quad s_1 - s_2 = -2\omega_0\sqrt{\delta^2-1}$$

Casos:

$a) \quad \delta > 1 \qquad \Rightarrow \qquad \left.\begin{matrix} s_1 = -\sigma_1 \quad , \quad \sigma_1 \\ s_2 = -\sigma_2 \quad , \quad \sigma_2 \end{matrix}\right\} = \omega_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2-1}\right)$

Descomposición en fracciones simples: $V_O(s) = V\left(\frac{1}{s} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}\frac{1}{s+\sigma_1} - \frac{\sigma_1}{\sigma_1-\sigma_2}\frac{1}{s+\sigma_2}\right)$

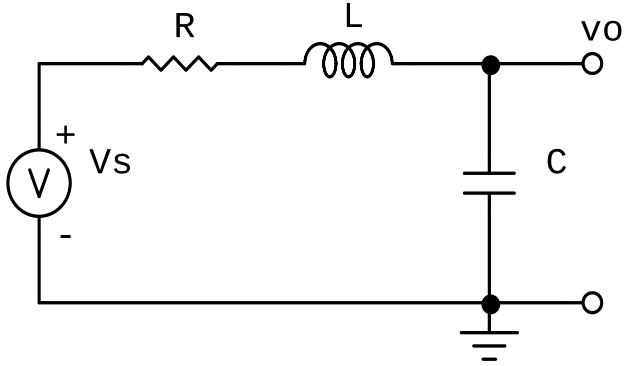
Transformada inversa: $v_o(t) = V\left(u(t) + \frac{\sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2}\right)$

$b) \quad \delta = 1 \qquad \Rightarrow \qquad s_1 = s_2 = -\omega_0$

Descomposición en fracciones simples: $V_O(s) = V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(s+\omega_0)^2}\right)$

Transformada inversa: $v_o(t) = V\left(u(t) - e^{-\omega_0 t} - \omega_0 t e^{-\omega_0 t}\right) \quad = \quad V\left[1 - (1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]$

Respuesta de un circuito RLC a una entrada escalón:



$$\boxed{V_O(s) = \frac{V\omega_0^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}}$$

c) $\delta < 1$ $\qquad \left.\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}\right\} = -\omega_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}\right) = -\omega_0\left(\delta \pm j\sqrt{1-\delta^2}\right)$

$$s_1 = -\sigma - j\omega \qquad \sigma = \omega_0\delta \quad , \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\delta^2}$$
$$s_2 = -\sigma + j\omega$$

$$s_1 s_2 = \sigma^2 + \omega^2 = \omega_0^2 \quad , \quad s_1 - s_2 = -2j\omega$$

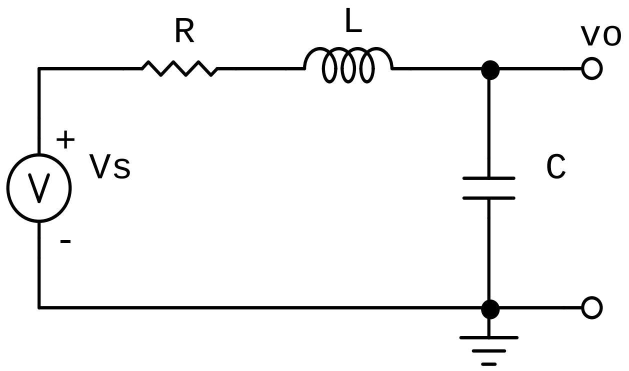
Descomposición en fracciones simples: $\quad V_O(s) = V\left(\frac{1}{s} + \frac{s_2}{s_1 - s_2}\frac{1}{s - s_1} - \frac{s_1}{s_1 - s_2}\frac{1}{s - s_2}\right)$

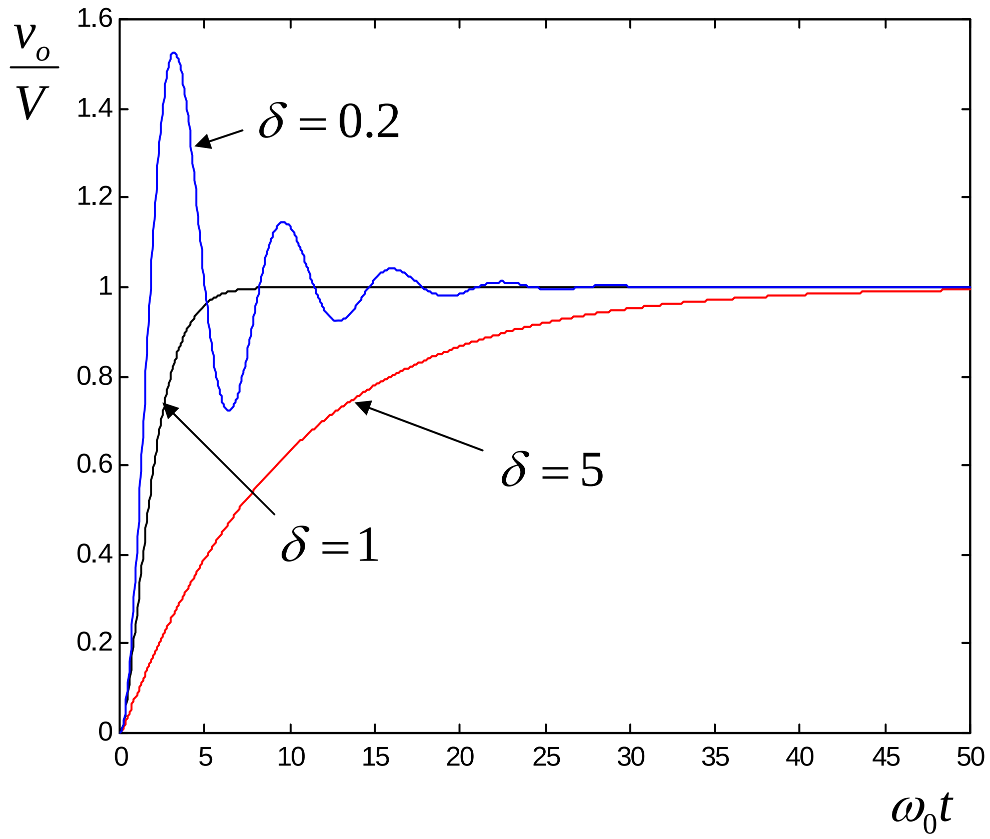
Transformada inversa: $\quad v_o(t) = V\left(u(t) - \frac{(-\sigma + j\omega)e^{-(\sigma + j\omega)t} - (-\sigma - j\omega)e^{-(\sigma - j\omega)t}}{2j\omega}\right)$

$$v_o(t) = V\left(u(t) + e^{-\sigma t}\frac{(\sigma - j\omega)e^{-j\omega t} - (\sigma + j\omega)e^{j\omega t}}{2j\omega}\right) = V\left(u(t) - e^{-\sigma t}\frac{\sigma}{\omega}\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} - e^{-\sigma t}\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right)$$

$$v_o(t) = V\left[1 - e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma}{\omega}\sin\omega t + \cos\omega t\right)\right] = V\left(1 - e^{-\sigma t}\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin\varphi}\right) \qquad \frac{\sigma}{\omega_0} = \delta \equiv \cos\varphi \,, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1-\delta^2} \equiv \sin\varphi$$

Respuesta de un circuito RLC a una entrada escalón:





$a)\quad \delta > 1$: Sistema sobreamortiguado

$$v_o(t) = V\left(u(t) + \frac{\sigma_2 e^{-\sigma_1 t} - \sigma_1 e^{-\sigma_2 t}}{\sigma_1 - \sigma_2} \right)$$

$b)\quad \delta = 1$: Amortiguamiento crítico

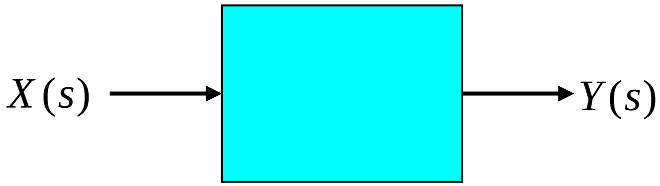
$$v_o(t) = V\left[1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}\right]$$

$c)\quad \delta < 1$: Sistema subamortiguado

$$v_o(t) = V\left(1 - e^{-\sigma t}\frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\sin\varphi} \right)$$

5.4.- Función de transferencia en el dominio de Laplace. Información que proporciona.

Definición: Función de transferencia = Relación entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada de un circuito inicialmente relajado (condiciones iniciales nulas en sus elementos)



$$T(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{c.i.nulas}$$

- Propiedades:

  - En general es una función racional. Las raíces del numerador se llaman ceros de la función de transferencia y las raíces del denominador se denominan polos.

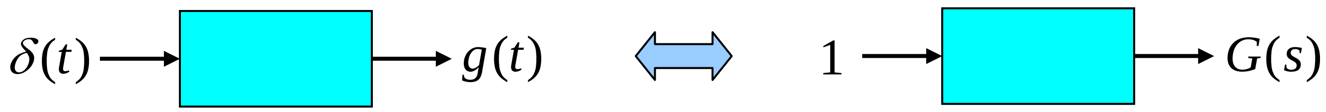
$$T(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m (s - s_{z1})(s - s_{z2}) \cdots (s - s_{zm})}{a_n (s - s_{p1})(s - s_{p2}) \cdots (s - s_{pn})}$$

  - Los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador coinciden con los de la ecuación diferencial del sistema

$$T(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad \Rightarrow \quad (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) X(s) = (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s)$$

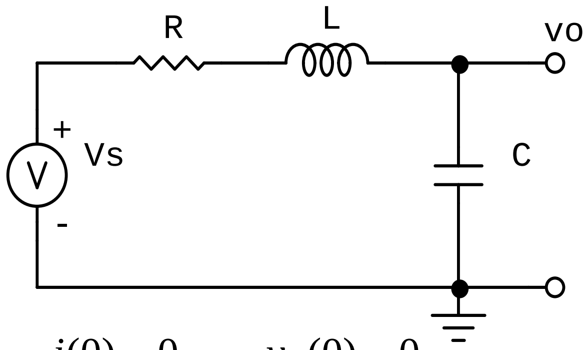
$$\Rightarrow \quad b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y$$

- Propiedades:
  - Su transformada inversa nos proporciona la respuesta del sistema ante un impulso unidad



$$x(t)=\delta(t) \quad \Rightarrow \quad X(s)=1 \quad \Rightarrow \quad Y(s)=G(s)=T(s) \quad \Rightarrow \quad \boxed{g(t)=L^{-1}\left[T(s)\right]}$$

Ejemplo: Respuesta de la red LCR serie ante una entrada impulso, con $\delta > 1$



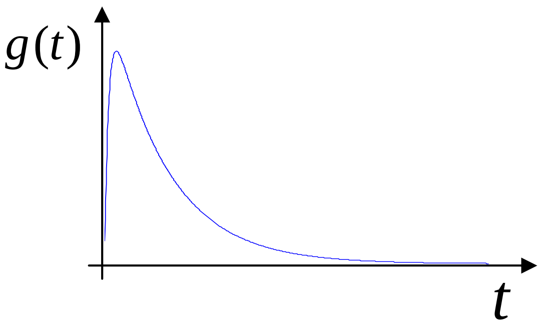
$$i(0)=0 \quad , \quad v_C(0)=0$$

$$V_S(s)=I(s)\left[R+Ls+\frac{1}{Cs}\right] \quad , \quad V_O(s)=I(s)\frac{1}{Cs} \quad \Rightarrow$$

$$T(s)=\frac{V_O(s)}{V_S(s)}=\frac{1}{R+Ls+\frac{1}{Cs}}\frac{1}{Cs}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \, , \quad \delta \equiv \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{\omega_0^2}{s^2+2\delta\omega_0 s+\omega_0^2}$$

$$\left.\begin{matrix}\sigma_2\\ \sigma_1\end{matrix}\right\}=\omega_0\left(\delta \pm \sqrt{\delta^2-1}\right) \quad \Rightarrow \quad G(s)=\frac{\omega_0^2}{\sigma_2-\sigma_1}\left(\frac{1}{s+\sigma_1}-\frac{1}{s+\sigma_2}\right)$$



$$\boxed{g(t)=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\delta^2-1}}\left(e^{-\sigma_1 t}-e^{-\sigma_2 t}\right)}$$

- Propiedades:
  - Nos proporciona información sobre la estabilidad del sistema:

$$Sistema\ \ estable \quad \Rightarrow \quad g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

Para ello, <u>los polos de la función de transferencia han de tener parte real negativa</u>

  - Nos permite evaluar la respuesta en frecuencia del sistema:

$$Z_C = \frac{1}{Cs} \xrightarrow{s=j\omega} Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Z_L = Ls \xrightarrow{s=j\omega} Z_L = jL\omega$$

$$\Rightarrow \quad T(\omega) = T(s = j\omega)$$

La función de transferencia definida en el Tema 4 es un caso particular de la definida en el dominio de Laplace. Haciendo s = jω nos quedamos con la respuesta permanente o estacionaria correspondiente a una entrada sinusoidal de frecuencia angular ω (perdemos información sobre la respuesta transitoria)

Al ser el diagrama de Bode una representación logarítmica, tendremos un término por cada polo y por cada cero de la función de transferencia. El diagrama de Bode completo será la suma de todos esos términos. (**Ejemplos: en relación de problemas**)