

Tema 6

- 1.- Redes Eléctricas. Leyes de Kirchhoff. Elementos de Circuito
- 2.- Métodos de Análisis de Circuitos Eléctricos
- 3.- Elementos reactivos. Respuesta transitoria
- 4.- Régimen Permanente Sinusoidal
- 5.- Análisis de Circuitos basado en la Transformada de Laplace

6.- Cuadripolos

- 6.1.- Ecuaciones y parámetros de un cuadripolo
- 6.2.- Relaciones entre los parámetros
- 6.3.- Interconexión de cuadripolos

6.1.- Ecuaciones y parámetros de un cuadripolo

- Puerto: Pareja de terminales a través de los cuales se introducen o extraen señales en el sistema
- Cuadripolo: Circuito de doble puerto (4 terminales), con las siguientes restricciones:
 - No se almacena energía en su interior (flujo entrante = flujo saliente)
 - No contiene fuentes independientes
 - En cada puerto, la corriente que entra ha de ser igual a la que sale \Rightarrow 4 variables

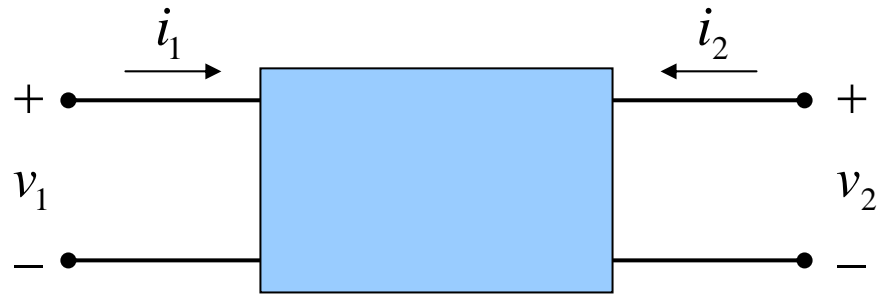


- Principio básico: Sólo nos interesan las variables en los terminales. No nos interesa calcular las corrientes y tensiones internas al circuito
 - Sistema lineal: Expresamos dos variables como combinación lineal de las otras dos.
- Ejemplo:

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

- Múltiples posibilidades:



1) Parámetros z (Impedancia)

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

3) Parámetros h (Híbridos)

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

5) Parámetros a (Transmisión)

$$v_1 = a_{11}v_2 + a_{12}i_2$$

$$i_1 = a_{21}v_2 + a_{22}i_2$$

2) Parámetros y (Admitancia)

$$i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2$$

$$i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2$$

4) Parámetros g (Híbridos)

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2$$

$$v_2 = g_{21}v_1 + g_{22}i_2$$

6) Parámetros b (Transmisión)

$$v_2 = b_{11}v_1 + b_{12}i_1$$

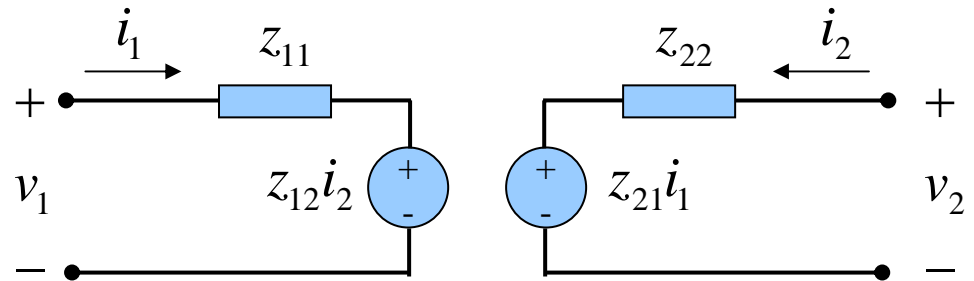
$$i_2 = b_{21}v_1 + b_{22}i_1$$

- Modelos y definición de los parámetros:

- Ejemplo: Parámetros z (Impedancia)

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$



$$z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad : \text{ Impedancia de entrada con salida en circuito abierto}$$

$$z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad : \text{ Impedancia de transferencia con entrada en circuito abierto}$$

$$z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad : \text{ Impedancia de transferencia con salida en circuito abierto}$$

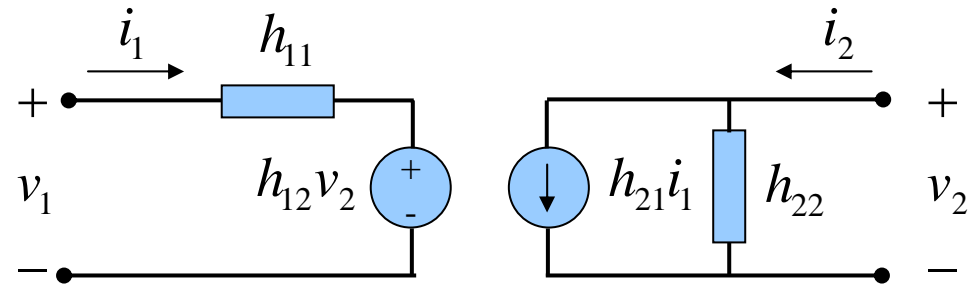
$$z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad : \text{ Impedancia de salida con entrada en circuito abierto}$$

- Modelos y definición de los parámetros:

- Ejemplo: Parámetros h (Híbridos)

$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$



$$h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} \quad : \text{ Impedancia de entrada con salida en cortocircuito}$$

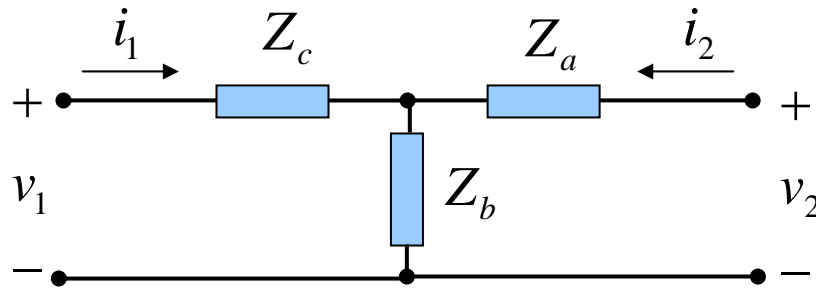
$$h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} \quad : \text{ Ganancia inversa de tensión con entrada en circuito abierto}$$

$$h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} \quad : \text{ Ganancia de corriente con salida en cortocircuito}$$

$$h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} \quad : \text{ Admitancia de salida con entrada en circuito abierto}$$

• Ejemplo de aplicación: Equivalencia estrella-triángulo, Y-Δ, o T-Π

- Redes equivalentes \Rightarrow Igualdad de parámetros z



$$z_{11} = Z_c + Z_b$$

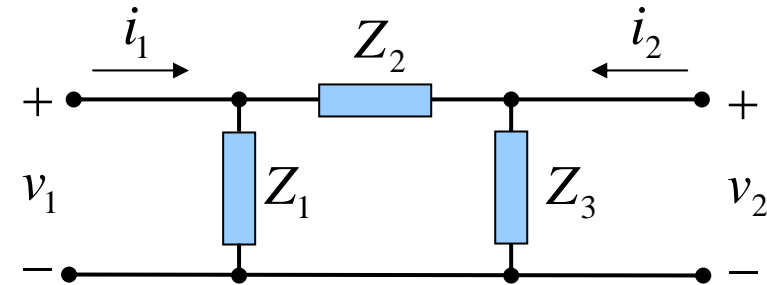
$$z_{12} = Z_b$$

$$z_{21} = Z_b$$

$$z_{22} = Z_a + Z_b$$

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$



$$z_{11} = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$z_{12} = Z_3 \parallel (Z_1 + Z_2) \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$z_{21} = Z_1 \parallel (Z_2 + Z_3) \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

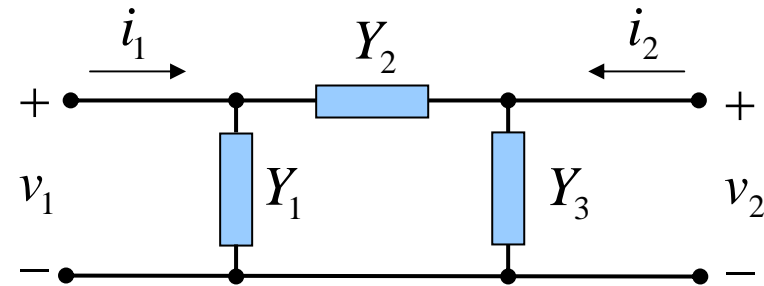
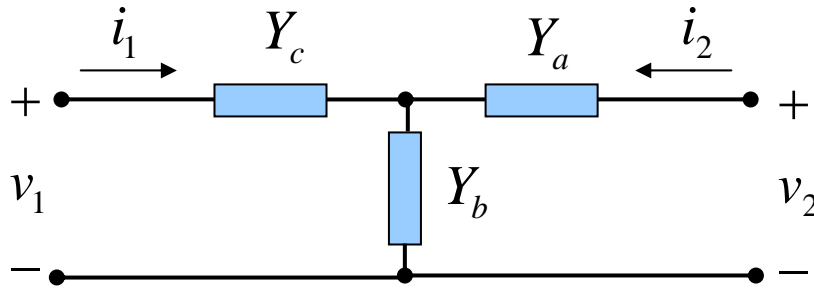
$$z_{22} = Z_3 \parallel (Z_1 + Z_2) = \frac{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

$$\Rightarrow Z_a = \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3}, \quad Z_b = \frac{Z_3 Z_1}{Z_1 + Z_2 + Z_3}, \quad Z_c = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

- Otro procedimiento: Igualdad de parámetros y

$$i_1 = y_{11}v_1 + y_{12}v_2$$

$$i_2 = y_{21}v_1 + y_{22}v_2$$



$$y_{11} = \left(\frac{1}{Y_c} + \frac{1}{Y_a + Y_b} \right)^{-1} = \frac{Y_c Y_a + Y_c Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$y_{11} = Y_1 + Y_2$$

$$y_{12} = \left(\frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_b + Y_c} \right)^{-1} \frac{(-Y_c)}{Y_b + Y_c} = -\frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

$$y_{12} = -Y_2$$

$$y_{21} = \left(\frac{1}{Y_c} + \frac{1}{Y_a + Y_b} \right)^{-1} \frac{(-Y_a)}{Y_a + Y_b} = -\frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

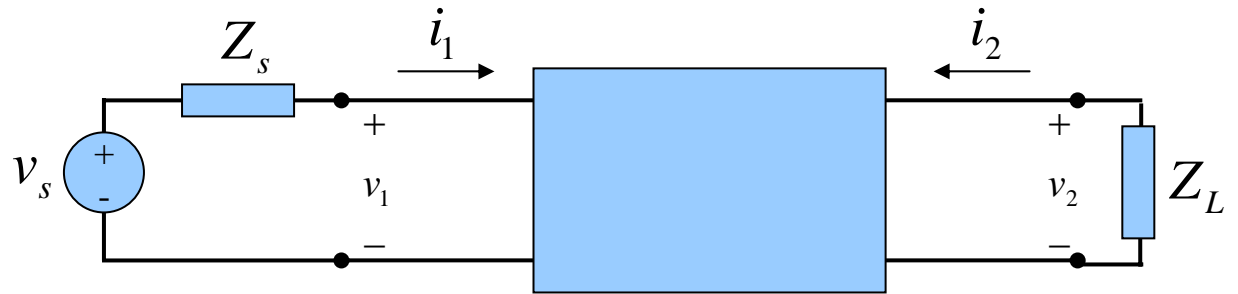
$$y_{21} = -Y_2$$

$$y_{22} = \left(\frac{1}{Y_a} + \frac{1}{Y_b + Y_c} \right)^{-1} = \frac{Y_a Y_b + Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

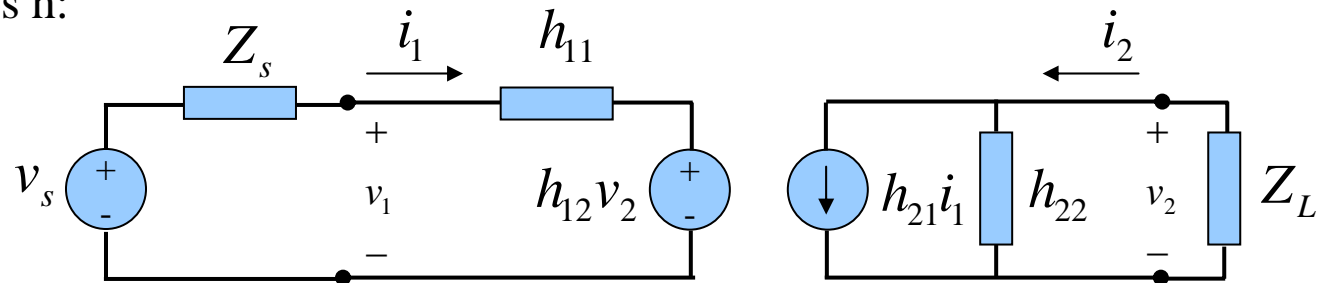
$$y_{22} = Y_2 + Y_3$$

$$\Rightarrow Y_1 = \frac{Y_b Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}, \quad Y_2 = \frac{Y_a Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c}, \quad Y_3 = \frac{Y_a Y_b}{Y_a + Y_b + Y_c}$$

- Cuadripolo con terminación.



- Ejemplo con parámetros h:



$$v_s = i_1(Z_s + h_{11}) + h_{12}v_2$$

$$v_2 = -h_{21}i_1 \left(Z_L \parallel \frac{1}{h_{22}} \right) = -h_{21}i_1 \frac{Z_L}{1 + h_{22}Z_L} \quad \Rightarrow$$

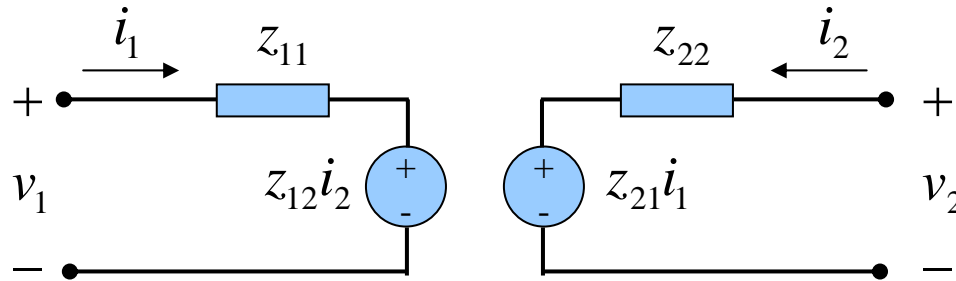
$$v_s = i_1(Z_s + h_{11}) - i_1 \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$$

$$v_1 = h_{11}i_1 - i_1 \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L} \Rightarrow Z_{in} \equiv \frac{v_1}{i_1} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}$$

$$A_{Vs} \equiv \frac{v_2}{v_s} = - \frac{\frac{h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}}{Z_s + h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}Z_L}{1 + h_{22}Z_L}} = - \frac{h_{21}Z_L}{(Z_s + h_{11})(1 + h_{22}Z_L) - h_{12}h_{21}Z_L}$$

6.2.- Relaciones entre parámetros

- Ejemplo: Relación entre parámetros z y parámetros h



$$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$$

$$i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$$

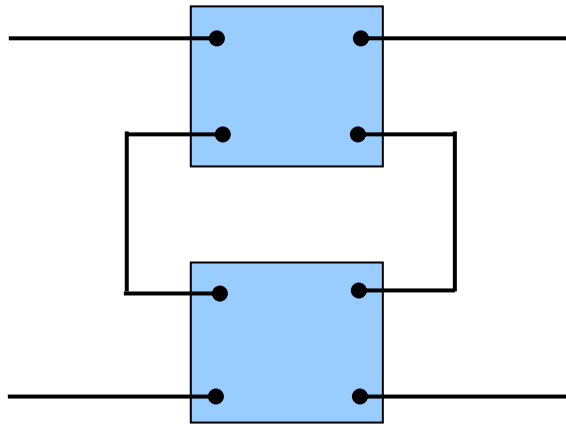
$$v_2 = 0 \Rightarrow z_{21}i_1 = -i_2z_{22}, \quad v_1 = z_{11}i_1 - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}}i_1 \Rightarrow \begin{cases} h_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{v_2=0} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22}} = \frac{\Delta_z}{z_{22}} \\ h_{21} = \left. \frac{i_2}{i_1} \right|_{v_2=0} = -\frac{z_{21}}{z_{22}} \end{cases}$$

$$i_1 = 0 \Rightarrow v_1 = z_{12}i_2, \quad v_2 = z_{22}i_2 \Rightarrow \begin{cases} h_{12} = \left. \frac{v_1}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ h_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{i_1=0} = \frac{1}{z_{22}} \end{cases} \quad (\Delta_z \equiv z_{11}z_{22} - z_{21}z_{12})$$

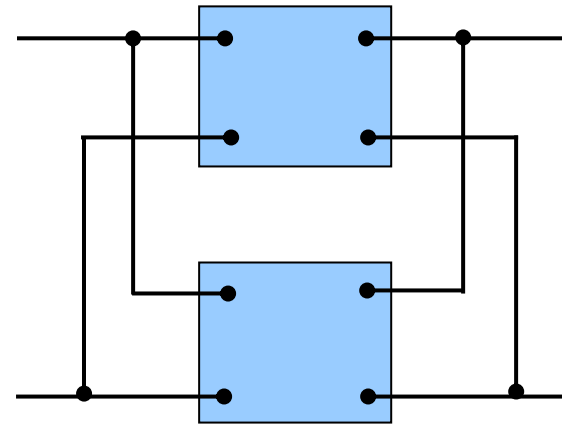
- Relación entre parámetros z y parámetros y:

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}, \quad y_{12} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z}, \quad y_{21} = \frac{z_{12}}{\Delta_z}, \quad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}$$

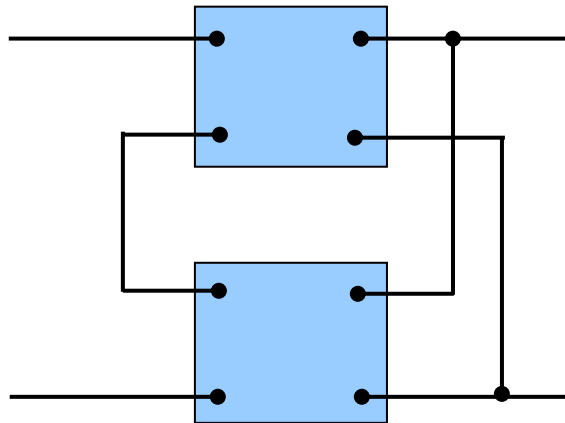
6.3.- Interconexión de cuadripolos



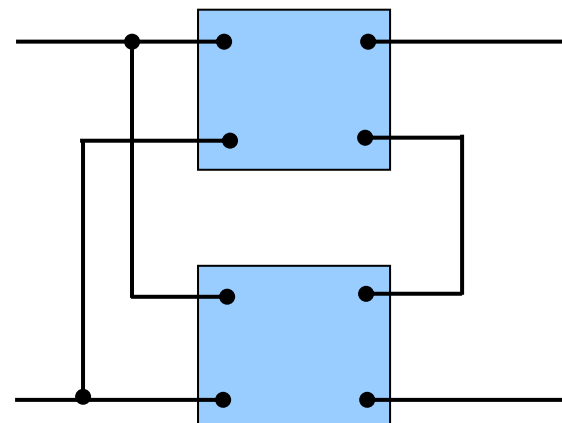
Conexión Serie: Interesan parámetros \mathbf{z}



Conexión Paralelo: Interesan parámetros \mathbf{y}



Conexión Serie-Paralelo: Interesan parámetros \mathbf{h}



Conexión Paralelo-Serie: Interesan parámetros \mathbf{g}