Tema 0. Introducción. Repaso de vectores

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción

La física tiene como objetivo el estudio de los fenómenos naturales para esclarecer la estructura de la realidad que nos rodea.

> Se podría decir que todas las ciencias tienen el mismo objetivo: ¿cuál es la diferencia entre la física y otras ciencias? De una forma algo ambigua se podría decir que la física trata de procesos más "básicos" que otras ciencias. Así, por ejemplo, dentro de la biología, la parte que trata con los sistemas biológicos desde un punto de vista fundamental, se llama biofísica; y ejemplos de este tipo tenemos en química-física, psicofísica, metafísica, etc.

En el siglo XIX, el campo de la física estaba restringido a los fenómenos y procesos donde la naturaleza de las sustancias que participan no varía. Esta definición ha ido variando y aumentando desde entonces, ya que, por ejemplo, la física nuclear no entraría dentro de esta definición.

La ciencia en general, pero especialmente la física, trata con *magnitudes físicas*, que son conceptos naturales que deben estar definidos con rigor y tienen que poder medirse. Este proceso de medida implica el establecimiento de una relación cuantitativa entre la medida concreta de la magnitud y el valor de dicha magnitud para un caso particular, que se toma como patrón o unidad. Por ejemplo, la medida de la masa de una barra particular que se encuentra en el instituto de pesas y medidas de París, se denomina kilogramo, y el proceso de medir cualquier otro cuerpo consiste en establecer una relación entre el valor que se obtiene en una experiencia particular, con el valor que se obtiene para la barra patrón (una es tres veces la otra, o 0,25 veces la otra, etc.).

Por tanto, distintas medidas de una magnitud tienen que ser comparables, es decir, se tienen que poder comparar su relación en términos absolutos (esta distancia es el doble que la otra, o dos tercios de la otra), **sin que en esta comparación intervenga el sistema de unidades**. Esto último significa que si la masa de un cuerpo es el doble que la de otro, esto debe ser independiente de que la masa se haya medido en kilogramos, en gramos, en libras, en arrobas o en unidades de masa atómica.

> No cualquier asignación de un número a una propiedad física cumple este simple requisito. Por ejemplo, la temperatura empírica que se mide con un termómetro normal y se expresa en grados centígrados. Imagínese que se mide una sistema y se observa una lectura de 1 °C y para otro sistema se observa una lectura de 10 °C, se podría decir que la segunda lectura es diez veces la primera. Sin embargo, esta relación variaría si se mide en la escala farenheit. Incluso no tendría sentido establecer esta relación si la primer lectura hubiese sido 0 °C. Por lo tanto, la temperatura empírica no es una buena magnitud física.
>
> Existen muchos problemas conceptuales a la hora de definir magnitudes físicas. Por ejemplo, inténtese definir las magnitudes masa o fuerza. La magnitud fuerza se puede definir como el efecto o interacción que un determinado medio ambiente tiene sobre un cuerpo. Esta definición puede ser conceptualmente válida, pero resulta vacía desde un punto de vista operacional, ya que no indica como puede ser medida la magnitud. Por el contrario, si se define fuerza como la magnitud capaz de variar la aceleración de un cuerpo, afirmando que dicha variación es proporcional, por un lado obliga a que la fuerza tenga un carácter vectorial, ya que la aceleración puede variar en módulo dirección y sentido, y proporciona un método para medir la magnitud fuerza. Para esta medida bastaría con actuar sobre un cuerpo patrón (por ejemplo de

> 1 kg), de forma que adquiera varias aceleraciones en una misma dirección y sentido. Tomando como patrón la fuerza que produce 1 m/s^2 sobre ese cuerpo patrón, se puede proporcionar una escala de fuerzas y diseñar de esta forma un dinamómetro. Esta segunda definición, sin embargo, produce una idea menos intuitiva de lo qué es una fuerza.

2. Magnitudes escalares y vectoriales

Algunas magnitudes físicas quedan totalmente determinadas con su valor numérico, como la temperatura, la presión, el volumen, etc., estas magnitudes se llaman *escalares*. Para otras magnitudes físicas hay que especificar la dirección y el sentido en los que actúan, aparte del valor numérico (módulo) de la magnitud. Estas magnitudes se llaman *vectoriales*.

> Si un coche circula en linea recta a una velocidad v_0 y sobre él empieza a actuar una aceleración a, se pueden presentar situaciones muy distintas dependiendo de la dirección y el sentido de la aceleración. Si la aceleración lleva la misma dirección y sentido que la velocidad, el coche sigue en línea recta, incrementando su velocidad. Si la aceleración lleva la misma dirección pero sentido contrario a la velocidad, el coche sigue en línea recta, pero en este caso disminuyendo su velocidad. Ahora bien, si la aceleración es perpendicular a la velocidad, el coche describe una curva, manteniendo el módulo de su velocidad constante.

Los vectores pueden ser de tres tipos: fijos, deslizantes y libres. Los vectores fijos tiene un punto de aplicación fijo en el espacio; los deslizantes se definen a lo largo de una recta, pero su punto de aplicación puede ser cualquier punto de la recta; y los vectores libres se definen con una dirección y sentido, pero su punto de aplicación puede ser cualquiera del espacio. Se encuentran ejemplos de estos tres tipos de vectores en las magnitudes físicas; por ejemplo, la posición sería un vector fijo, la fuerza sobre un cuerpo extenso sería un vector deslizante y el momento de giro de un cuerpo es un vector libre. Para los tres tipos de vectores, el criterio de igualdad es distinto.

3. Álgebra vectorial

Según la definición matemática, un *espacio vectorial* consiste en dos conjuntos, uno de *vectores* que tiene que ser un *grupo* en que se pueda definir una operación interna, y otro de *escalares* que tienen que ser un *cuerpo*, de forma que se pueda definir una opración mixta entre vectores y escalares. Las operaciones internas y mixtas deben cumplir una serie de propiedades. Los grupos y cuerpos son entes matemáticos que se definen como conjuntos de elementos en los que se pueden definir ciertas operaciones y se cumplen ciertas propiedades.

En este curso se va a trabajar en el espacio vectorial euclídeo, donde los vectores serán secciones de rectas en tres dimensiones orientadas que se denominarán *vectores cartesianos*. Será en este espacio vectorial común donde definiremos distintas operaciones y propiedades, dejando para nuestros compañeros matemáticos de la asignatura de álgebra la importante labor de formalizar estos conceptos en un marco más general.

En los vectores cartesianos se puede definir una suma entre dos vectores, como la diagonal del paralelepípedo que forman los dos vectores. Así si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores, también lo hará $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Para cualesquiera vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, esta suma de vectores cumple:

1. Propiedad conmutativa. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. Propiedad asociativa. $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

3. Elemento neutro. Existe un vector $\vec{0}$, tal que $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

4. Elemento opuesto. Para todo vector $\vec{a}$ existe un vector opuesto, que se nota $-\vec{a}$, tal que $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = 0$.

Para los vectores cartesianos también se puede definir el producto de un escalar por un vector. El resultado de esta multiplicación será un vector de la misma dirección que el primero, pero con una longitud alargada tantas veces como diga el escalar (si el escalar es menor que uno, la longitud se acortará, y si el escalar es negativo el vector resultante tendrá sentido cambiado). Así, si $\vec{a}$ es un vector y q un escalar, el producto $q\vec{a}$ es un vector, y para cualesquiera escalares p y q y cualesquiera vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, el producto de escalares por vectores así definido tiene las siguientes propiedades:

1. Asociativa. $(pq)\vec{a} = p(q\vec{a}) = q(p\vec{a})$

2. Distributiva respecto la suma de escalares. $(p + q)\vec{a} = p\vec{a} + q\vec{a}$.

3. Distributiva respecto la suma de vectores. $q(\vec{a} + \vec{b}) = q\vec{a} + q\vec{b}$.

Volviendo brevemente a la definición de un espacio vectorial general, la suma de vectores y el producto de vectores y escalares es lo que antes hemos definido como operaciones internas y mixta. Así, un espacio vectorial se define como un grupo, en el que se puede definir una operación interna que cumple lo mismo que se ha mostrado para la anterior suma de vectores, y un cuerpo, de forma que se puede definir una operación mixta entre los elementos del cuerpo y los del grupo, resultando elementos del grupo, y con dicha operación satisfaciendo las propiedades que se han mostrado para el producto entre vectores y escalares.

Ejemplos de espacios vectoriales son las funciones reales integrables, las series infinitamente sumables, las variables aleatorias, etc.

Como se ha dicho antes, un vector cartesiano será un segmento de recta orientado en el espacio. El problema del punto de aplicación de los vectores (y con ello del carácter ligado, deslizante o libre) es más un problema físico que uno matemático y fácilmente tratable con la teoría general, sin más que trabajar con distintos sistemas de referencia. Por lo tanto, se trabajará con vectores fijos. De todas formas, la gran mayoría de los resultados del curso se pueden entender sin atender a la diferencia entre los tres tipos de vectores antes indicada.

Aparte de las operaciones anteriormente definidas, los vectores cartesianos cumplen otras muchas. A continuación se enumerarán las más importantes.

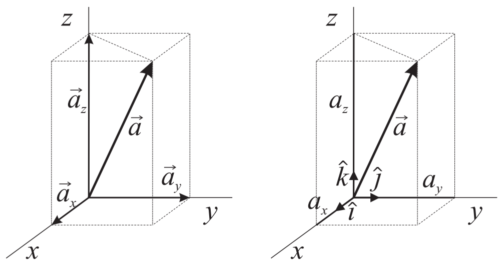
3.1. Módulo o norma de un vector

El módulo de un vector cartesiano es la longitud del segmento. No en todos los casos los vectores de un espacio vectorial tienen módulo. Cuando esto sucede, el espacio vectorial se dice que es un espacio *normado* o espacio de Banach. Para un vector $\vec{a}$ se nota su módulo como a o como $|\vec{a}|$.

3.2. Versores

Se define un versor como un vector de módulo igual a uno. Para cualquier vector $\vec{a}$ se puede definir un versor en la misma dirección y sentido, pero de módulo unidad como $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Es fácil comprobar que $|\hat{a}| = 1$. En general, el símbolo "ˆ" encima de una letra, indica que se trata de un vector de módulo unidad, es decir, un versor. La mayor utilidad de los versores es que sirven para definir direcciones en el espacio.

3.3. Componentes cartesianas de un vector



(a) (b)

Figura 1: *Descomposición de un vector $\vec{a}$ (a) en vectores ortogonales (b) utilizando los versores cartesianos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, y $\hat{k}$.*

Cuantitativamente es muy difícil trabajar con segmentos de rectas directamente, por lo que se utiliza la descomposición respecto tres direcciones que se conocen como *ejes*. En principio cualquiera tres rectas no coplanarias (que no estén en el mismo plano) son suficientes para la descomposición de vectores, sin embargo, se suelen utilizar tres rectas ortogonales, ya que es mucho más fácil trabajar con ellas.

Tal y como se indica en la Figura **??**, un vector $\vec{a}$ se puede expresar como la suma de tres vectores

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

También se pueden definir un versor para cada uno de los ejes, definiendo una dirección positiva en cada eje como la dirección hacia la que apunta dicho versor. Para el eje x se define el versor $\hat{\imath}$, para el eje y el versor $\hat{\jmath}$ y para el eje z el versor $\hat{k}$. Con estas definiciones, $\vec{a}_x = a_x\hat{\imath}$, $\vec{a}_y = a_y\hat{\jmath}$ y $\vec{a}_z = a_z\hat{k}$. Teniendo esto en cuenta, y tal y como se representa en la Figura 1(b), el vector $\vec{a}$ se puede expresar como:

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

Las cantidades a_x, a_y y a_z se conocen como las coordenadas cartesianas del vector $\vec{a}$, y, una vez definidos los ejes, las tres coordenadas caracterizan **univocamente** el vector.

Al ser tres ejes elegidos son perpendiculares, es fácil calcular el módulo de un vector haciendo uso de sus componentes cartesianas y el resultado es:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

3.4. Producto escalar

El producto escalar es una operación entre dos vectores que dan como resultado un escalar. Se define como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos(\angle ab)$$

donde $\angle ab$ es el ángulo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Se puede comprobar que este producto tiene las siguientes propiedades:

- Conmutativa: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
- Distributiva: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- Asociativa: $p(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (p\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (p\vec{b})$

También es fácil comprobar que si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, es decir forman 90°.

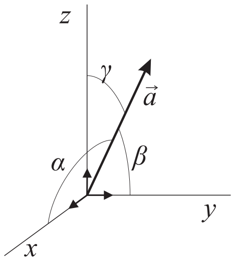


Figura 2: *Ángulos directores de un vector $\vec{a}$.*

Desarrollando los vectores en función de sus componentes cartesianas y haciendo uso de las anteriores propiedades es fácil comprobar que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

A partir de la definición del producto escalar y de la anterior expresión haciendo uso de componentes cartesianas, se puede obtener una expresión para el coseno del ángulo entre dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\cos(\angle ab) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

Los *cosenos directores* se definen como los cosenos de los ángulos que un vector $\vec{a}$ forma con cada uno de los tres ejes coordenados. Así, si a estos tres ángulos se les denomina α, β y γ, tal y como se muestra en la Figura 2, sus cosenos se podrán expresar como:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \hat{\imath}}{a} = \frac{a_x}{a}, \ \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \hat{\jmath}}{a} = \frac{a_y}{a}, \ \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \hat{k}}{a} = \frac{a_z}{a}$$

3.5. Producto vectorial

El producto vectorial es una operación entre dos vectores que da como resultado otro vector, por lo que se dice que es una operación interna. Se definen como:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = ab \operatorname{sen}(\angle ab) \hat{e}$$

donde $\hat{e}$ es un versor en la dirección que es perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$, y cuyo sentido viene indicado por la regla de la mano derecha, tal y como se aprecia en la Figura 3.

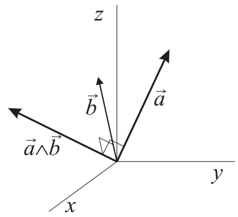


Figura 3: *Producto vectorial de dos vectores.*

Se pueden comprobar las propiedades de este producto y son:

- Anticonmutativa: $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.
- Distributiva: $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$.
- **No** tiene propiedad asociativa respecto a sí mismo $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \neq \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$.
- Asociativa respecto al producto con escalares: $p(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (p\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (p\vec{b})$.
- **No** tiene elemento neutro.

Teniendo en cuenta la propiedad distributiva y los productos entre versores:

$$\begin{array}{lll} \hat{\imath} \wedge \hat{\imath} = 0 & \hat{\imath} \wedge \hat{\jmath} = \hat{k} & \hat{\imath} \wedge \hat{k} = -\hat{\jmath} \\ \hat{\jmath} \wedge \hat{\imath} = -\hat{k} & \hat{\jmath} \wedge \hat{\jmath} = 0 & \hat{\jmath} \wedge \hat{k} = \hat{\imath} \\ \hat{k} \wedge \hat{\imath} = \hat{\jmath} & \hat{k} \wedge \hat{\jmath} = -\hat{\imath} & \hat{k} \wedge \hat{k} = 0 \end{array}$$

se puede calcular cualquier producto vectorial, haciendo uso de las componentes cartesianas de los vectores. El resultado se expresa como:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

3.6. Superficies

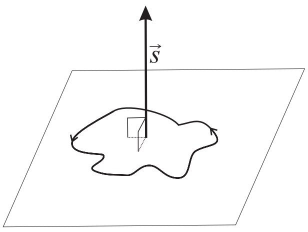


Figura 4: *Vector superficie.*

Una superficie **plana** se puede caracterizar por un vector libre $\vec{s}$ cuyo módulo es igual al valor numérico del área, dirección perpendicular a la superficie y sentido según indique la regla de la mano derecha al recorrer el borde de la superficie en un determinado sentido. La Figura 4 representa un ejemplo de superficie plana y vector superficie.

Cuando la superficie es un paralelepípedo de dos dimensiones, el valor del área es el producto de la base por la altura, o lo que es lo mismo, si a y b son las longitudes de los dos lados del paralelepípedo, su área resulta $s = ab\,\mathrm{sen}(\angle ab)$. Como el vector área es perpendicular, es fácil comprobar que para el área de un paralelepípedo definido por dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, dicho vector superficie resulta:

$$\vec{s} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$

La anterior definición de superficie sólo es válida para superficies planas, ya que una superficie curva no tiene una dirección perpendicular. Sin embargo, una superficie curva puede dividirse en pequeños trozos Δs_i. Si estos trozos son suficientemente pequeños, se podrá considerar aproximadamente planos y se podrán definir para cada trozo un vector $\Delta\vec{s}_i$. El vector superficie $\vec{s}$ de la totalidad de la superficie curva será aproximadamente igual a la suma de los vectores superficies de los trozos, es decir:

$$\vec{s} \approx \sum_i \Delta\vec{s}_i \tag{1}$$

En la Figura 5 se puede observar este procedimiento de separar las superficies en trozos y la asignación de un vector de superficie a cada uno de ellos (se han dibujado dos de estos vectores, por simplicidad).

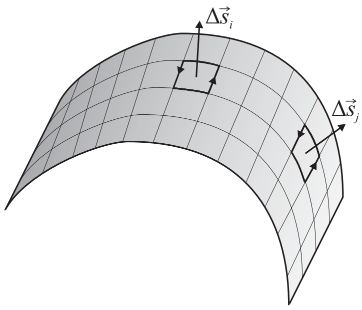


Figura 5: *Vectores superficie para trozos de en una superficie curva.*

El procedimiento descrito anteriormente para superficies curvas es sólo aproximado, ya que tomar un trozo de una superficie curva como si fuera plano no es del todo correcto. Mientras más pequeños sean los trozos mejor será la aproximación. En el límite de trozos muy pequeños, los trozos se hacen *diferenciales*, y $\Delta\vec{s}_i$ pasa a ser $d\vec{s}_i$ (un vector diferencial, es un vector de módulo diferencial, es decir, de módulo infinitamente pequeño o infinitesimal). La suma de infinitos trozos diferenciales (al hacerse los trozos cada vez más pequeño se necesita un número cada vez mayor para llenar toda la superficie) no es otra cosa que una integral. Así, para una superficie curva se define su vector superficie $\vec{s}$ como:

$$\vec{s} = \lim_{\Delta \to 0} \sum_i \Delta\vec{s}_i = \int d\vec{s} \tag{2}$$

Hay que tener cuidado de recorrer todos los trozos en el mismo sentido. En principio, el sentido se puede elegir arbitrariamente, pero para *superficies cerradas* (superficies que se cierran sobre sí mismas, definiendo un volumen), se toma siempre al sentido de los vectores superficie hacia afuera del volumen.

Para terminar con las superficies, es importante notar que tanto en la ecuación (1) como en la ecuación (2), la suma es una suma **vectorial**, por lo que no sólo habrá que tener en cuenta el módulo de los vectores superficie para los trozos, sino también sus direcciones relativas. Por ejemplo, si se considera una superficie cerrada, para cada trozo de vector de superficie $d\vec{s}_i$ habrá un vector en la posición opuesta en la superficie cerrada que tendrá mismo módulo (si se ha partido la superficie en trozos iguales), misma dirección y sentido contrario, por lo que en la suma, se anularán uno al otro. Esto produce el siguiente resultado: **El vector superficie de una superficie cerrada es el vector nulo**. Matemáticamente este resultado se escribe:

$$\vec{s} = \oint d\vec{s} = \vec{0}$$

donde el círculo en la integral indica que la superficie es cerrada.

Lo anterior no quiere decir que el área de una superficie cerrada sea nula. Por ejemplo, bien es sabido que el área de una esfera es $\frac{4}{3}\pi R^2$, mientras que su vector de superficie es nulo. Lo que sucede es que para una superficie curva, el área de la superficie es **distinta** del módulo del vector superficie.

3.7. Vector de posición

El ejemplo más simple de vector que aparece en física es el vector de posición. Para definir la posición que una partícula ocupa en el espacio, es necesario definir primero un origen de coordenadas. Una vez hecho esto, el vector de posición de cualquier partícula será el vector que tenga como inicio el origen de coordenadas y como final el punto donde se encuentra la partícula.

4. Campos escalares y vectoriales

El concepto de *campo* es actualmente uno de los más importantes en la física. Aunque originalmente se introdujo como una mera y conveniente herramienta matemática, el desarrollo de las teorías físicas le ha dado a este concepto mucha más entidad de la que en un principio se podría esperar.

Un campo es una magnitud física que se puede definir en una región del espacio, dependiendo de la posición y posiblemente del tiempo.

Así, por ejemplo, la temperatura o la presión en del aire en la superficie terrestre representan un campo, ya que a cada punto de la superficie se le puede asignar una temperatura y una presión. Otros ejemplos de campo serían el campo de alturas en la superficie terrestre, el campo de velocidades de un fluido en una tubería, el campo eléctrico en las inmediaciones de una distribución de carga, el campo de densidad en un fluido compresible, el campo de esfuerzos en un material sometido a tensiones, etc.

4.1. Tipos de campos

Se pueden realizar diversas clasificaciones en función de distintos aspectos de los campos. A continuación se presentan algunos ejemplos.

- En función del carácter escalar o vectorial de la magnitud que constituye el campo se tiene:
  - *Campos escalares*. La magnitud física es un escalar. Ejemplos serían campos de temperatura, presión, densidad, etc. Si f es la magnitud física, el campo se notaría como $f(\vec{r}, t)$ o $f(x, y, z, t)$.
  - *Campos vectoriales*. La magnitud física es un vector. Ejemplos serían campos de velocidades, fuerzas, intensidad de campo eléctrico, esfuerzos, etc. En este caso, si $\vec{a}$ es la magnitud física, el campo se nota como $\vec{a}(\vec{r}, t)$ o $\vec{a}(x, y, z, t)$.

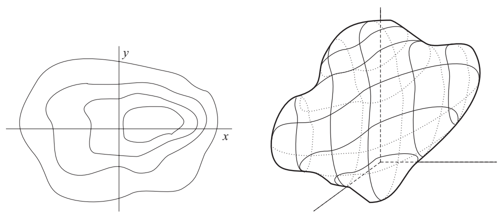
También existen magnitudes físicas que no son escalares ni vectores, sino *tensores*. Para estas magnitudes se definen campos tensoriales, pero estas magnitudes y por tanto estos campos se encuentran fuera del objetivo de este curso.

- En función de la dependencia temporal de la magnitud:
  - *Campos estacionarios.* La magnitud física no depende del tiempo. Por su puesto, en este caso el campo será de la forma $f(\vec{r})$ o $\vec{a}(\vec{r})$.
  - *Campos no estacionarios.* Los valores de la magnitud física dependen del tiempo.
- En función de las dimensiones en las que el campo tome valores:
  - *Campos unidimensionales.* La magnitud física se define en un espacio de una única dimensión, como al temperatura de una barra.
  - *Campos bidimensionales.* La magnitud física se define en un espacio de dos dimensiones, como la velocidad de las olas en la superficie del mar.
  - *Campos tridimensionales.* La magnitud física se define en un espacio de tres dimensiones, como la densidad en un fluido.

Existen otras clasificaciones que iremos introduciendo a medida que avance esta sección.

4.2. Representación de campos escalares

La representación de campos escalares se suele hacer mediante *superficies equipotenciales*. Estas superficies se definen como el lugar geométrico del espacio en el que la magnitud toma un mismo valor. Un ejemplo de estas superficies aparece en la Figura 6(b). Por supuesto, en el caso de que campos bidimiensionales, se tendrán líneas equipotenciales, tal y como aparece en la Figura 6(a) (¿como sería en campos unidimensionales?). Ejemplo de estas líneas son las líneas de isobaras que aparecen en los mapas meteorológicos o las lineas de altura de los mapas topográficos.



(a) (b)

Figura 6: *Superficies equipotenciales para (a) un campo bidimensional y (b) un campo tridimensionales.*

Es fácil ver a partir de la definición que ni las líneas ni las superficies equipotenciales pueden cortarse, ya que en los puntos de intersección la magnitud tomaría dos valores, lo que no es posible.

4.3. Representación de campos vectoriales

En los campos vectoriales, en cada punto se define una magnitud que es un vector, por lo que el procedimiento anterior para campos vectoriales no es válido. Lo que se hace es hacer uso de *lineas de campos*, que son los lineas tangentes a los vectores campos en cada punto. Con esto se consigue representar la dirección del campo. Para representar el módulo se dibujan las líneas más juntas en las zonas de campo de mayor módulo, y viceversa. Un ejemplo de estas líneas se encuentra en la Figura 7, donde se observa como los vectores campo son tangentes a estas líneas.

4.4. Gradiente de un campo escalar

Dado un campo escalar $f(x, y, z)$ (el campo puede depender también del tiempo, pero se elimina la dependencia explícita por comodidad, aunque no varía en absoluto los resultados que aquí se presentan) al movernos a lo largo del eje x una cantidad Δx, manteniendo y y z constantes, la función variará a un valor $f(x + \Delta x, y, z)$. La variación de la función f al moverse de un punto a otro será por tanto $\Delta f = f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)$. Tanto Δx como Δf son dos escalares, por lo que se puede realizar el cociente $\Delta f/\Delta x$. Este cociente dependerá de x, Δx, y y z. Para que no dependa de Δx se puede hacer el límite $\Delta \to 0$ (la variación tiene a cero), con lo que el cociente queda:

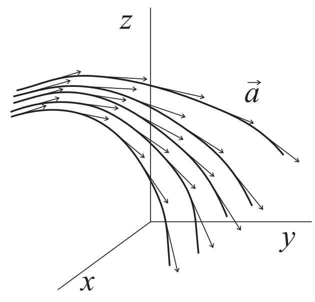


Figura 7: *Lineas de campos.*

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta\to 0} \left. \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \right|_{yz} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad (3)$$

donde la notación "$\cdot|_{yz}$" indica que las magnitudes y y z permanecen constantes.

La expresión anterior representa la definición de *derivada parcial de f con respecto a x*, $\frac{\partial f}{\partial x}$, y mide como varía la función $f(x, y, z)$, al variar x, manteniendo y y z constantes.

En límite $\Delta \to 0$, se tiene que la variación de x se expresa como dx y la variación de f se expresa como $df|_{yz}$, de forma que el cociente de (3) también se puede expresar como:

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df|_{yz}}{dx}$$

Por tanto, la variación de f al movernos un dx en el eje x será:

$$df|_{yz} = \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Este mismo procedimiento se puede repetir para variaciones a lo largo de los ejes y y z, de forma que se obtiene la definición de las parciales $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial z}$, así como las variaciones de la función f al moverse en direcciones paralelas a los ejes y y z.

Para obtener una expresión general, válida para cualquier dirección es necesario repetir el procedimiento, moviéndose de un punto $\vec{r}$ a un punto $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ genérico, con $\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{\imath}+\Delta y\hat{\jmath}+\Delta z\hat{k}$. En el límite $\Delta \to 0$, la variación de la función f será la suma de la variación de f debida a que se mueve en la dirección x, igual a $\frac{\partial f}{\partial x}dx$, más la variación de f al moverse en la dirección y, igual a $\frac{\partial f}{\partial y}dy$, más la variación de f al moverse en la dirección z, igual a $\frac{\partial f}{\partial z}dz$; o lo que es lo mismo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

En el límite $\Delta \to 0$, la variación de posición resulta $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$. Si ahora se define un vector $\vec{\nabla} f$ como:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Se obtiene:

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \quad (4)$$

El vector $\vec{\nabla} f$ se conoce como *vector gradiente del campo escalar f* y depende del punto $\vec{r}$ y posiblemente del t, pero no de $d\vec{r}$

El vector $d\vec{r}$ es un vector infinitesimal en la dirección en la que nos movemos dentro del campo. Si la trayectoria en la que nos movemos es recta, el vector $d\vec{r}$ llevará esa misma dirección, y si es curva, $d\vec{r}$ será tangente a la trayectoria. Aunque el vector $\vec{\nabla} f$ sea independiente de la dirección en que nos movemos no sucederá lo mismo para la variación de f, que sí depende. En concreto, haciendo uso de la definición de producto escalar se tiene:

$$df = |\vec{\nabla} f||d\vec{r}| \cos\theta$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{\nabla} f$ y $d\vec{r}$. Por tanto, si nos movemos en una dirección paralela a $\vec{\nabla} f$ y en el mismo sentido, la variación será máxima, mientras que si nos movemos en una dirección perpendicular a $\vec{\nabla} f$, la variación de f será nula. Esto demuestra que **el gradiente de una función escalar en un punto marca la dirección y el sentido de la máxima variación del campo f.**

También se puede observar que de un campo escalar f hemos obtenido un campo vectorial $\vec{\nabla} f$, ya que a cada punto se le puede asignar su gradiente, lo que, al ser éste vectorial, define un campo vectorial.

Para finalizar, es conveniente definir el *operador gradiente* u *operador nabla* en coordenadas cartesianas como:

$$\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

De forma que el gradiente de un campo escalar f es el resultado de aplicar el anterior operador sobre el campo. La anterior definición es un *operador*, es decir, es de la misma naturaleza que el operador derivada o como el operador integral: es una operación (en este caso tres, una para cada componente del vector) que se realiza sobre una función, modificando su resultado. Este operador será muy útil en las próximas secciones para obtener ciertas propiedades de los campos.

4.5. Derivada e integral de un vector respecto de un escalar

Un campo vectorial $\vec{a}(\vec{r}, t)$ se puede expresar en función de sus componentes cartesianas de la forma:

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = a_x(\vec{r}, t)\hat{\imath} + a_y(\vec{r}, t)\hat{\jmath} + a_z(\vec{r}, t)\hat{k}$$

Así una derivada parcial o total (si sólo depende de una variable) de un campo vectorial será igual a la derivada de cada una de sus componentes, por ejemplo:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{a}_x}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \vec{a}_y}{\partial x}\hat{\jmath} + \frac{\partial \vec{a}_z}{\partial x}\hat{k} \quad \text{ó} \quad \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{d\vec{a}_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d\vec{a}_z}{dt}\hat{k}$$

Lo mismo sucede con la integral de un campo vectorial respecto de un parámetro u del que dependa el campo. Así resulta:

$$\int \vec{a}(u)du = \int a_x(u)du\hat{\imath} + \int a_y(u)du\hat{\jmath} \int a_z(u)du\hat{k}$$

4.6. Circulación de un vector

El la sección anterior se ha definido la integral de un campo vectorial respecto a un parámetro escalar, que puede ser el tiempo, por ejemplo. Sin embargo, al ser vectores, se puede calcular una integral direccional, que mide como se relacionan el campo vectorial y el vector de desplazamiento

$d\vec{r}$ a lo largo de una trayectoria. Esta relación define lo que se conoce como la *circulación de un campo vectorial* a lo largo de una trayectoria C, entre los puntos $\vec{r}_a$ y $\vec{r}_b$, que se expresa como:

$$\text{cir}\vec{a} = \int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

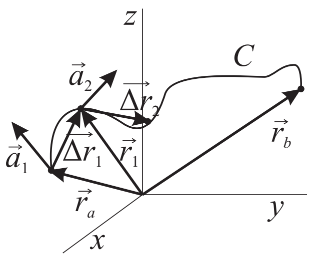


Figura 8: *Esquema de una circulación a lo largo del camino C.*

Puede parecer una definición algo extraña, pero la circulación juega un papel muy importante en mecánica, ya que la circulación de una fuerza será el trabajo realizado.

Si se parte del punto $\vec{r}_a$ y nos movemos una cierta cantidad $\overrightarrow{\Delta r}_1$, se puede medir el producto escalar entre el campo en este primer punto $\vec{r}_a$ y el primer desplazamiento $\vec{a}_1 \cdot \overrightarrow{\Delta r}_1$. A continuación nos movemos otra pequeña cantidad $\overrightarrow{\Delta r}_2$ respecto del último punto y se puede multiplicar escalarmente este desplazamiento por el campo en el último punto, resultando $\vec{a}_2 \cdot \overrightarrow{\Delta r}_2$. Estos dos primeros pasos se esquematizan en la Figura 8. Este proceso se va repitiendo hasta llegar al punto $\vec{r}_b$, y la suma de los productos escalares será una aproximación de la circulación. Precisamente, en el límite de desplazamientos muy pequeños se tiene:

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_i \vec{a}_i \cdot \overrightarrow{\Delta r}_i = \int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Es importante subrayar dos aspectos importantes sobre la circulación. Por un lado, es la suma de productos escalares, por lo que es un **escalar**. Por otro lado, la circulación depende el los puntos iniciales y finales pero también del **camino** o trayectoria que se haya tomado, de forma que par dos trayectorias distintas C_1 y C_2, en general se tiene:

$$\int_{\vec{r}_a\ C_1}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r} \neq \int_{\vec{r}_a\ C_2}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Si el campo vectorial $\vec{a}$ es el gradiente de un campo escalar se cumple $\vec{a} = \vec{\nabla} f$. Con anterioridad se ha visto en (4) que $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, por lo que la circulación de un campo de este tipo queda:

$$\int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} df$$

Sin embargo, la última integral es la integral del número 1 respecto de una parámetro escalar, por lo que será igual al valor de f en el punto final menos el valor en el punto inicial. Es decir:

$$\int_{\vec{r}_a\ C}^{\vec{r}_b} \vec{a} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_b) - f(\vec{r}_a)$$

Como puede verse, para obtener el valor de la integral no se ha utilizado en ningún caso el camino elegido, lo que implica que en el caso de que $\vec{a} = \vec{\nabla} f$, la circulación **no** depende del camino y sólo depende del punto inicial y final.

Los campos cuya circulación no depende del camino se conocen como *campos conservativos* o *campos irrotacionales*. Estos campos son de enorme importancia en mecánica, ya que a través de la definición de trabajo, los campos de fuerzas conservativos permitirán definir una magnitud escalar fundamental en la física, como es la energía potencial.

Para todo campo $\vec{a}$ conservativo se puede encontrar una función f, que se denomina *potencial*, tal que $\vec{a} = \vec{\nabla} f$ (con anterioridad se había demostrado la implicación contraria). La demostración de esta afirmación es algo laboriosa y debido a esto la omitimos, pero puede encontrarse en cualquier libro elemental de análisis multidimensional.

Si el punto inicial y el final de la trayectoria sobre la que se calcula la circulación son el mismo, se dice que la trayectoria es cerrada, y la circulación sobre esa trayectoria se nota como:

$$\oint \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Es muy fácil de comprobar que si el campo $\vec{a}$ es conservativo, la circulación sobre una trayectoria cerrada es nula.

4.7. Flujo de un campo vectorial

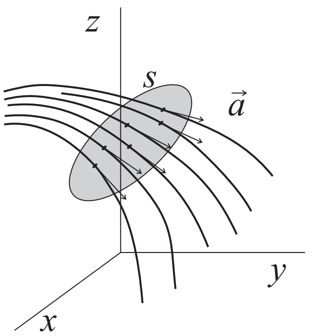


Figura 9: *Esquema de un flujo de un campo $\vec{a}$ a través de una superficie s.*

Para un campo vectorial, en muchas situaciones prácticas es interesante calcular cuanto campo atraviesa una determinada superficie. Esta relación la proporciona la magnitud denominada *flujo*, Φ, que se define como

$$\Phi = \int_s \vec{a} \cdot d\vec{s}$$

donde $\int_s$ indica integral de superficie y $\overrightarrow{ds}$ es el vector superficie de un trozo de área diferencial. Ejemplos de magnitudes físicas que se definen como un flujo hay muchas, siendo los más comunes el caudal en un fluido (el flujo del campo de velocidades) y la intensidad eléctrica (el flujo del vector densidad de corriente).

Como puede verse, el flujo es una magnitud **escalar**, que depende de la superficie de integración. La superficie sobre la cual se calcula el flujo puede ser una superficie cerrada, en cuyo caso la notación sería

$$\Phi = \oint_s \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds}$$

En este caso, el flujo sobre una superficie cerrada indicará la cantidad de campo que sale (si es positivo) o entra (si es negativo) en el volumen definido por la superficie cerrada.

Existirán campos vectoriales en los que el flujo a través de **cualquier** superficie cerrada será nulo. Este tipo de campos se llamarán *solenoidales*, y los campos que no cumplan lo mismo serán *no solenoidales*.

4.8. Divergencia de un campo vectorial

Ni el flujo ni la divergencia son funciones de punto. El primero depende de una superficie y el segundo de un camino, siendo ambos elementos que dependen de infinitos puntos. Por tanto, no es cómodo trabajar con estas cantidades para caracterizar los campos. Es mucho más conveniente definir magnitudes de punto que lleven información similar al flujo y a la circulación. Para la primera se definirá en esta sección la divergencia y para la segunda se hará lo mismo con el rotacional en la siguiente sección.

La relación entre la divergencia y el flujo y entre el rotacional y la circulación se pondrá de manifiesto primera y la definición de las funciones de punto, y posteriormente en dos teoremas finales: el teorema de Gauss y el teorema de Stokes.

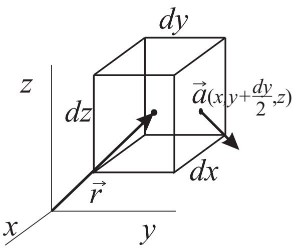


Figura 10: *Esquema del flujo a través de una superficie cerrada para definir la divergencia.*

Para construir una función de punto que esté relacionada con el flujo, se toma una superficie cerrada, lo que define un volumen ΔV, de forma que envuelva el punto donde se quiere calcular la magnitud, y se calcula el flujo a través de dicha superficie cerrada. Después se hace esta superficie cada vez más pequeña, siempre conteniendo el punto. En el límite, la magnitud que resulta llevará información del campo que sale o entra en un punto. El cociente entre este flujo diferencial y volumen diferencial es lo que se conoce como *divergencia*, div$\vec{a}$:

$$\text{div}\vec{a} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta s} \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{d\Phi}{dV}$$

Como puede verse, la divergencia es una función **escalar**, y es una función de punto, es decir, tiene sentido dar un valor de la divergencia para cada uno de los puntos.

A continuación se procederá para a calcular la expresión en coordenadas cartesianas de esta magnitud. Para ello, la superficie que se irá encerrando serán cubos, con el punto donde se quiere calcular la divergencia en el centro, que en el límite pasará a ser un cubo de dimensiones infinitesimales.

El cubo de tamaño diferencial envolviendo al punto se muestra en la Figura 10. La cara y del cubo (paralela al plano xz) situada más a la derecha, tendrá un vector de superficie $d\vec{s} = dxdz\hat{\jmath}$. Como el cubo es muy pequeño, el campo en esa cara se puede considerar constante e igual a $\vec{a}(x, y + \frac{dy}{2}, z)$. El producto escalar del campo por el vector de superficie en esa cara será igual a $a_y(x, y + \frac{dy}{2}, z)dxdz$, lo que será igual al flujo diferencial a través de esa cara. Por tanto, el flujo a través de las dos caras y será

$$\begin{aligned} d\Phi_y = &- a_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right) dxdz + a_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) dxdz = \\ &= \left[a_y\left(x, y + \frac{dy}{2}, z\right) - a_y\left(x, y - \frac{dy}{2}, z\right)\right] dxdz \end{aligned}$$

donde el primero de los signos negativos tiene se debe a que el vector superficie en la cara de la izquierda va hacia fuera del cubo, es decir, en dirección $-\hat{\jmath}$. Haciendo uso de la definición de derivada parcial, el flujo a través de las caras y del cubo queda

$$d\Phi_y = \frac{\partial a_y}{\partial y} dydxdz$$

De igual forma se puede hacer para las caras x e z, resultando

$$d\Phi_x = \frac{\partial a_x}{\partial x} dxdydz \quad \text{y} \quad d\Phi_z = \frac{\partial a_z}{\partial z} dzdxdy$$

con lo que el flujo a través de toda la superficie del cubo infinitesimal queda:

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dzdxdy$$

Pero, para el cubo infinitesimal $dV = dxdydz$, por lo que la divergencia queda

$$\text{div}\vec{a} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Con la definición del operador gradiente, es fácil ver que la divergencia se puede expresar como:

$$\text{div}\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

Esta última expresión es la más común de la divergencia y la que se suele encontrar en todos los libros.

4.8.1. Teorema de Gauss

De la definición de divergencia se puede obtener un teorema importantísimo en electrostática y gravitación, que se conoce como teorema de Gauss. Este teorema dice

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \oint_s \vec{a} \cdot \overrightarrow{ds}$$

donde $\int_V$ indica que es una integral de volumen. Intuitivamente viene a decir que el flujo a través de una superficie cerrada es igual a la cantidad de fuentes que hay en el volumen encerrado por la superficie.

La demostración del teorema es sencilla sin más que partir de la definición de divergencia y su expresión haciendo uso de operador gradiente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{d\Phi}{dV} \Longrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = d\Phi \Longrightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{a} dV = \Phi$$

4.9. Rotacional de un campo vectorial

Al igual que la divergencia es la magnitud de punto que proporciona la misma información local que el flujo hace para superficies, el rotacional será la magnitud de punto que lleve localmente la misma información que la circulación proporciona a lo largo de una trayectoria cerrada.

En la deducción de la divergencia, no se hizo alusión a la forma del volumen, ya que éste se hace infinitamente pequeño, donde la forma no importa. Lo mismo sucede en esta sección para la forma concreta de la trayectoria de integración, pero no así para su orientación. Si se mantiene la trayectoria de integración en un plano, incluso al hacerla infinitamente pequeña, la orientación del plano que contiene a dicha trayectoria permanece fija. Por tanto, habrá que tener en cuenta la orientación de las trayectorias, lo que producirá un función vectorial (a diferencia de la divergencia, que era escalar, ya que no dependía de ninguna dirección).

La idea es tomar una trayectoria cerrada, contenida en un plano, de forma que define una superficie de área Δs, y de dirección del vector de superficie $\Delta\vec{s}$, se puede caracterizar por el versor $\hat{e}_s = \Delta\vec{s}/\Delta s$. Se calcula la circulación cir$\vec{a}$ a través del camino cerrado

$$\text{cir}\vec{a} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

donde, como ya se ha dicho, C es el camino cerrado que coincide con el borde de la superficie plana.

El siguiente paso será hacer la trayectoria cerrada cada vez más pequeña, lo que implica hacer también el área Δs cada vez más pequeña. Al disminuir la longitud de la trayectoria cerrada, disminuirá también el valor de la circulación, por lo que para obtener una función que no tienda a cero se calcula el cociente de la trayectoria y el aérea:

$$\frac{1}{\Delta s} \oint \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

El rotacional del campo vectorial $\vec{a}$, que se notará como rot$\vec{a}$, se define en el límite $\Delta \to 0$, como:

$$\hat{e}_s \cdot \mathrm{rot}\vec{a} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint \vec{a} \cdot d\vec{r} = \frac{d\,(\mathrm{cir}\vec{a})}{ds} \tag{5}$$

Donde se ha utilizado que en el límite resulta $d\,(\mathrm{cir}\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{r}$.

Es importante subrayar que el rotacional así definido es una función de punto y una magnitud vectorial.

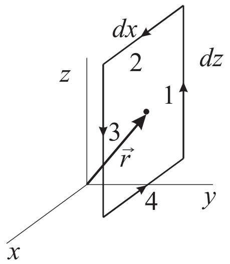


Figura 11: *Trayectoria cerrada.*

Falta encontrar la expresión de esta función vectorial en algún sistema de coordenadas, lo que permitirá calcularlo de forma sencilla. Para ello se parte de una trayectoria cerrada, en el plano xz, de forma que define un rectángulo de lados dx y dz cuadrado tal y como indica la Figura 11. El superficie definida por el camino cerrado tiene un área de $dxdz$, mientras que el vector superficie lleva una dirección $\hat{\jmath}$. Así, el versor $\hat{e}_s$ utilizado en la definición del rotacional es $\hat{\jmath}$. Se tiene de esta manera que

$$\hat{e}_s \cdot \mathrm{rot}\vec{a} = (\mathrm{rot}\vec{a})_y$$

es decir, el camino elegido permitirá conocer la componente del vector rot$\vec{a}$ en la dirección del eje y.

Durante el trozo 1 del camino cerrado, el vector desplazamiento diferencial $d\vec{r}$ es igual a $dx\hat{k}$. Como ese trozo es muy pequeño, se puede considerar el campo $\vec{a}$ constante e igual a

$$\vec{a}(x - \frac{dx}{2}, y, z) = a_x(x - \frac{dx}{2}, y, z)\hat{\imath} + a_y(x - \frac{dx}{2}, y, z)\hat{\jmath} + a_z(x - \frac{dx}{2}, y, z)\hat{k}$$

Al hacer el producto escalar entre el campo y el vector desplazamiento, la contribución de este trozo a la circulación será

$$a_z(x - \frac{dx}{2}, y, z)dz$$

Este proceso se repite para los trozos 2, 3 y 4, y el resultado es que la circulación diferencial $d(\mathrm{cir}\vec{a})$ (es muy pequeña al ser el camino cerrado muy pequeño) queda

$$d(\mathrm{cir}\vec{a}) = a_z(x - \frac{dx}{2}, y, z)dz + a_x(x, y, z + \frac{dz}{2})dx - a_z(x + \frac{dx}{2}, y, z)dz - a_x(x, y, z - \frac{dz}{2})dx$$

Para calcular $(\mathrm{rot}\vec{a})_y$ hay que dividir $d(\mathrm{cir}\vec{a})$ por $ds = dxdz$, el resultado es

$$(\mathrm{rot}\vec{a})_y = -\left(\frac{a_z(x + \frac{dx}{2}, y, z)}{dx} - \frac{a_z(x - \frac{dx}{2}, y, z)}{dx}\right) + \left(\frac{a_x(x, y, z + \frac{dz}{2})}{dz} - \frac{a_x(x, y, z - \frac{dz}{2})}{dz}\right)$$

Como estamos en el límite, los anteriores cocientes no son otra cosa que las derivadas parciales de las componentes a_x y a_z, con lo que la componente y del rotacional queda:

$$(\mathrm{rot}\vec{a})_y = -\frac{\partial a_z}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z}$$

Este mismo procedimiento se puede repetir para las componentes x y z del rotacional, tomando las trayectorias adecuadas, y el resultado es:

$$(\mathrm{rot}\vec{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}$$
$$(\mathrm{rot}\vec{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

La expresión del vector rotacional queda por tanto como:

$$\text{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Habitualmente, el rotacional de un campo vectorial se nota, haciendo uso de este último resultado, simplemente como $\vec{\nabla} \wedge \vec{a}$.

4.9.1. Teorema de Stokes

Debido a su definición, el existe un estrecha relación entre el rotacional de un campo vectorial y la circulación de este campo a través de una trayectoria cerrada. Esta relación queda recogida en el Teorema de Stokes, que se enuncia a continuación, y que será útil en el cálculo de ciertas magnitudes físicas como el campo magnético.

Según la definición de rotacional dada en (5) y la definición del vector $\hat{e}_s$, se tiene

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) \cdot \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{d(\text{cir}\vec{a})}{ds}$$

por tanto, simplificando los ds que aparecen en ambos términos, queda:

$$(\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) \cdot d\vec{s} = d(\text{cir}\vec{a}) = \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

La anterior igualdad es válida para cualquier punto de una trayectoria que define una superficie, por lo que se puede integrar a toda la trayectoria, dando lugar al Teorema de Stokes

$$\int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Este teorema afirma que el flujo del rotacional de un campo vectorial a través de una superficie es igual a la circulación del mismo campo a lo largo del borde de dicha superficie.

5. Sistemas de coordenadas

Cualquier vector de posición $\vec{r}$ de un punto P se puede expresar en función de los tres versores directores $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$, como $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Se dice que el vector $\vec{r}$ se descompone en los tres versores o coordenadas, y que los resultados de la proyección o descomposición son las tres cantidades (x, y, z), que se conocen como coordenadas del vector o del punto P en el sistema de coordenadas cartesiano. Sin embargo, está descomposición no es única, es decir, se pueden utilizar otros tres vectores para descomponer el vector $\vec{r}$. En esto consisten los distintos sistemas de coordenadas, en un conjunto de tres vectores, generalmente perpendiculares, que permiten expresar cualquier vector. En esta sección se estudiarán dos de estos sistemas de coordenadas: los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

5.1. Sistema de coordenadas cilíndricas

En este sistema de coordenadas las tres cantidades que caracterizan el vector de posición o al punto P son (ρ, φ, z), que se conocen como coordenadas cilíndricas, donde ρ es la distancia del punto P al eje z, φ es el ángulo que sustiende la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el plano xy

con el eje x. En la Figura 12 se puede observar estas dos últimas cantidades, que se expresan en función de las coordenadas cartesianas como:

$$\begin{aligned} \rho =& \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi =& \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Además de estas cantidades se pueden definir dos versores, que junto con el versor $\hat{k}$ definen los tres versores del sistema de coordenadas cilíndricas. Estos dos versores son el versor $\hat{\rho}$, que es un vector unitario en la dirección de la perpendicular al eje z que lo une con el punto P, sentido contrario al eje; y el versor $\hat{\varphi}$, que es vector unitario perpendicular a $\hat{k}$ y a $\hat{\rho}$, y que hace que $\hat{\rho} \wedge \hat{\varphi} = \hat{k}$.

Los versores del sistema de coordenadas cilíndricos serán $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k})$, que son fáciles de expresar en función de los versores cartesianos como:

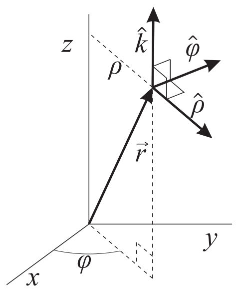


Figura 12: *Versores y coordenadas en el sistema de coordenadas cilíndricas.*

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos\varphi\hat{\imath} + \operatorname{sen}\varphi\hat{\jmath} \\ \hat{\varphi} &= -\operatorname{sen}\varphi\hat{\imath} + \cos\varphi\hat{\jmath} \\ \hat{k} &= \hat{k} \end{aligned} \tag{7}$$

Tan válido es el sistema coordenado cartesiano como el cilíndrico, por lo que también las coordenadas cartesianas se pueden poner en función de las cilíndricas como

$$\begin{aligned} x =& \rho\cos\varphi \\ y =& \rho\operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \tag{8}$$

y los versores cartesianos se pueden poner en función de los cilíndricos como

$$\begin{aligned} \hat{\imath} &= \cos\varphi\hat{\rho} - \operatorname{sen}\varphi\hat{\varphi} \\ \hat{\jmath} &= \operatorname{sen}\varphi\hat{\rho} + \cos\varphi\hat{\varphi} \\ \hat{k} &= \hat{k} \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema de ecuaciones (8) se obtiene del sistema de ecuaciones (6), sin más que despejar en este último las coordenadas (x, y, z). Lo mismo sucede con el sistema (9) y el sistema (7), pero en este caso despejando los vectores $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.

El vector de posición $\vec{r}$ se expresa en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} \tag{10}$$

Cualquier campo vectorial $\vec{a}(\vec{r})$ que se defina en el punto $\vec{r}$ se podrá expresar en función de los tres vectores $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{k})$, ya que son perpendiculares. Dicha descomposición quedaría:

$$\vec{a} = a_\rho\hat{\rho} + a_\varphi\hat{\varphi} + a_z\hat{k} \tag{11}$$

Un ejemplo de esta descomposición sería el vector desplazamiento $d\vec{r}$ en el punto $\vec{r}$, que se expresaría como:

$$d\vec{r} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} + dz\hat{k}$$

Para obtener $d\vec{r}$ a partir de $\vec{r}$, es necesario utilizar que para una función vectorial $\vec{g}$ que dependa de varias variables $(x_1, x_2, \dots)$, su vector variación $\vec{dg}$ se expresa como:

$$\vec{dg} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{g}}{\partial x_2} dx_2 + \dots$$

por lo que

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz$$

De la expresión de $\vec{r}$ en (10) y la expresión de los versores cilíndricos en cartesianas (7) se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \frac{\partial \rho\hat{\rho}}{\partial \rho} = \hat{\rho} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial (\rho\hat{\rho})}{\partial \varphi} = \rho \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \rho\hat{\varphi} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \frac{\partial (z\hat{k})}{\partial z} = \hat{k}
\end{aligned}$$

Es importante resaltar que los vectores $(\hat{\rho}, \hat{\varphi})$ cambian de unos puntos a otros, ya que su dirección va cambiando a medida que el punto gira.

Es importante encontrar la expresión del gradiente, la divergencia y el rotacional en este nuevo sistema de coordenadas. Para ello se comienza utilizando el resultado que hemos encontrado para una campo escalar f, se tiene que su variación al movernos un paso infinitesimal $d\vec{r}$ resulta $df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r}$, que no es otra cosa que la ecuación (4). Como el campo f depende el punto, depende de las tres coordenadas que definen el punto. Esto implica que $f = f(\rho, \varphi, z)$, por lo que su variación será:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Si se compara la ecuación (4) con este último resultado y se tiene en cuenta la expresión de $\vec{r}$ en coordenadas cilíndricas, dada en (10), es fácil la expresión del gradiente de f en coordenadas cilíndricas, que es:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$$

De este resultado se puede obtener también la expresión del operador gradiente en este sistema de coordenadas:

$$\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \tag{12}$$

Una vez con la expresión del operador gradiente (12), es fácil obtener las expresiones de la divergencia y del rotacional, sin más que utilizar sus definiciones.

Para la divergencias, se tenía que div$\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$, donde se puede sustituir (12) y (11), resultando:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \left(\hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(a_\rho \hat{\rho} + a_\varphi \hat{\varphi} + a_z \hat{k} \right)$$

Para realizar el producto vectorial, hay que tener en cuenta que el versor $\hat{\rho}$ depende el ángulo φ, tal y como se puede apreciar en (7), donde es fácil comprobar que $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} = \hat{\varphi}$. Por tanto, se tiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \hat{\rho} \cdot \hat{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} \left(a_\rho + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \hat{k} \cdot \hat{k} \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

y agrupando términos se encuentra el resultado final para la divergencia de un vector $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas, que es:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \left(\rho a_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Para obtener la expresión del rotacional de un campo vectorial $\vec{a}$ en coordenadas cilíndricas se sigue el mismo procedimiento que anteriormente se ha mostrado para la divergencia, resultando:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \hat{\varphi} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix}$$

5.2. Sistema de coordenadas esféricas

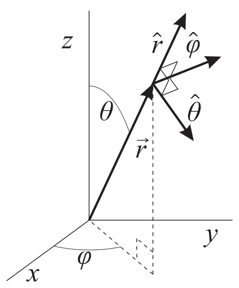


Figura 13: *Versores y coordenadas en el sistema de coordenadas esféricas.*

Como se ha visto cualquier punto P se puede caracterizar por las coordenadas cartesianas (x, y, z), o bien con las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z). Otras tres posibles cantidades con las que se puede caracterizar el cualquier punto son el ángulo φ (definido en el apartado anterior), la distancia del punto al centro de coordenadas r (igual al módulo de $\vec{r}$), y el ángulo entre el vector de posición y el eje z, denominado θ. Por tanto, un punto P viene caracterizado en el sistema de coordenadas esféricas por las coordenadas (r, θ, φ). En la Figura 13 pueden verse estas tres coordenadas.

La obtención de las coordenadas esféricas esféricas haciendo uso de las cartesianas es sencilla a partir de sus definiciones y resulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Junto con las tres anteriores coordenadas se pueden definir tres versores $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$. El versor $\hat{r}$ es un versor con la misma dirección y sentido que el vector de posición, es decir $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$. El versor $\hat{\varphi}$ ya fue definido para el sistema de coordenadas cilíndricas, y el versor $\hat{\theta}$ lleva la única dirección que es perpendicular a $\hat{r}$ y a $\hat{\varphi}$ y el sentido que permite que $\hat{r} \wedge \hat{\theta} = \hat{\varphi}$. En la Figura 13 pueden verse estos tres versores.

Estos versores se pueden obtener a partir de los versores cartesianos como:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \hat{\imath} + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\jmath} + \cos\theta \hat{k} \\ \hat{\theta} &= \cos\theta \cos\varphi \hat{\imath} + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\jmath} - \operatorname{sen}\theta \hat{k} \\ \hat{\varphi} &= -\operatorname{sen}\varphi \hat{\imath} + \cos\varphi \hat{\jmath} \end{aligned} \tag{14}$$

En la expresión anterior de los versores $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ haciendo uso de los versores cartesianos, se puede ver como estos versores dependen de las propias coordenadas esféricas. Esto quiere decir que, al igual que los versores del sistema de coordenadas cilíndricas, la dirección de los versores variará al variar el punto. También implica las siguientes relaciones que son fáciles de obtener derivando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} &= -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\imath} + \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\jmath} = \operatorname{sen}\theta \hat{\varphi} \\
\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} &= -\cos\theta \cos\varphi \hat{\imath} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\jmath} - \operatorname{sen}\theta \hat{k} = \hat{\theta} \\
\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \varphi} &= -\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\imath} + \cos\theta \cos\varphi \hat{\jmath} = \cos\theta \hat{\varphi} \\
\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} &= -\operatorname{sen}\theta \cos\varphi \hat{\imath} - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \hat{\jmath} - \cos\theta \hat{k} = -\hat{r} \\
\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} &= -\cos\varphi \hat{\imath} - \operatorname{sen}\varphi \hat{\jmath} = -\operatorname{sen}\theta \hat{r} - \cos\theta \hat{\theta}
\end{aligned} \tag{15}$$

Tanto las coordenadas cartesianas como las cilíndricas se pueden expresar en función de las coordenadas esféricas

$$\left.\begin{array}{l} x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\} \text{ y } \left.\begin{array}{l} \rho = r \operatorname{sen}\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{array}\right\}$$

En este sistema de coordenadas, el vector de posición toma una expresión muy sencilla, que es:

$$\vec{r} = r\hat{r} \tag{16}$$

Cualquier vector definido en el punto P se puede poner en función de los tres versores $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$, de forma que

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_\varphi \hat{\varphi} \tag{17}$$

En concreto, el vector desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ se puede expresar en función de estos tres versores. Para obtener la expresión hay que repetir el proceso seguido para coordenadas cilíndricas. De la expresión (17) se puede ver que $\vec{r}$ depende de la coordenada r y del versor $\hat{r}$. Este último versor depende a su vez de la coordenadas θ y φ, por lo que el vector de posición $\vec{r}$ depende de las tres coordenadas (como era lógico esperar). Por tanto, su vector variación infinitesimal $d\vec{r}$ se puede expresar como

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}dr + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}d\varphi$$

El vector de posición toma la expresión (16), lo que se sustituye en la última expresión y queda

$$d\vec{r} = \frac{\partial r}{\partial r}\hat{r}dr + r\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta}d\theta + r\frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi}d\varphi$$

donde se ha utilizado que $\hat{r}$ no depende de r y que r no depende ni de θ ni de φ. Utilizando las derivadas parciales que aparecen en (15), se puede obtener la expresión final para $d\vec{r}$ que resulta ser

$$d\vec{r} = \hat{r}dr + r\hat{\theta}d\theta + r\operatorname{sen}\theta\hat{\varphi}d\varphi \tag{18}$$

Sólo falta por obtener la expresión del gradiente de un campo escalar, el operador gradiente y la divergencia y el rotacional de un campo vectorial. Operando de igual manera a como se hizo para el sistema de coordenadas cilíndricas, el gradiente de un campo escalar queda

$$\vec{\nabla} f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

Con lo que el operador gradiente resulta

$$\vec{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\varphi}\frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Este operador se utiliza para obtener la expresión de la divergencia de un campo vectorial $\vec{a}$, que queda

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial\left(\operatorname{sen}\theta a_\theta\right)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}$$

y el rotacional del campo $\vec{a}$, que queda

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{a} = \frac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\operatorname{sen}\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\theta & r\operatorname{sen}\theta a_\varphi \end{vmatrix}$$