Tema 1. Mecánica.

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción **3**

2. Cinemática **3**
2.1. Espacio, tiempo y móvil 3
2.2. Descripción matemática del movimiento 4
2.3. Velocidad 4
2.4. Aceleración 6
2.5. Componentes intrínsecas de la aceleración 6
2.6. Tipos de movimiento 7
2.6.1. Movimiento rectilíneo uniforme 7
2.6.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado 8
2.6.3. Movimiento con aceleración constante 9
2.7. Relatividad del movimiento 9
2.7.1. Posiciones, velocidades y aceleraciones relativas 9

3. Leyes de la dinámica clásica **10**
3.1. Fuerza y masa 11
3.2. Primera ley de Newton o ley de inercia 11
3.3. Segunda ley de Newton 12
3.4. Momento lineal o cantidad de movimiento 12
3.5. Tercera ley de Newton 13

4. Tipos de fuerza **13**
4.1. Fuerzas fundamentales 14
4.2. Peso y peso aparente 14
4.3. Fuerza de rozamiento entre sólidos 15
4.4. Fuerza de rozamiento en fluidos 16
4.5. Fuerzas elásticas 17
4.6. Fuerzas de ligadura 18
4.7. Fuerzas de inercia 19

5. Trabajo y energía **19**
5.1. Trabajo 19
5.2. Potencia 24
5.3. Energía 24
5.4. Teorema de conservación de la energía cinética 24

6. Fuerzas conservativas. Energía potencial **25**

7. Conservación de la energía mecánica **29**
7.1. Sistema no conservativos 29

8. Colisiones **30**

1. Introducción

El *movimiento* es el fenómeno físico más obvio y se define como el cambio de posición de una partícula a lo largo del tiempo. Como la posición se define mediante el vector de posición, cualquier cambio de este vector implicará un movimiento.

La *mecánica* es la parte de la física que estudia el movimiento, y se divide así mismo en tres ramas: la cinemática, la estática y la dinámica. La *cinemática* estudia el movimiento de partículas sin atender a las causas (fuerzas) que producen estos movimientos, la *estática* estudia las condiciones que se tienen que cumplir para que un sistema no se mueva, y por último, la *dinámica* estudia las causas del movimiento, que se denominan *fuerzas*, y los movimientos que éstas provocan. En la siguiente sección se estudiará la cinemática, y el resto del tema tratará sobre la dinámica. La estática, como tal, no se estudiará en este curso.

Los conceptos (energía, posición, velocidad, ...) y el método seguido en el estudio de la mecánica aparece en el resto de las ramas de la física y en gran parte de los problemas de ingeniería, por lo que un tratamiento riguroso de éstos es necesario para asegurar su comprensión.

En este tema se tratan los principios básicos de la dinámica de Newton, aplicados sobre todo a una masa puntual. Estos conceptos y métodos de estudio se suelen luego extender a sistemas de partículas en general y sólidos rígidos en particular, pero esta extensión queda fuera de los objetivos de este curso. Sólo se tratarán sistemas de partículas en ejemplos concretos y al estudiar conservación de la cantidad de movimientos, pero no se estudiará la teoría general.

Se comenzará estudiando cinemática, donde se introducirán las magnitudes cinemáticas y los distintos tipos de movimiento. En la Sección 3 se enunciarán las leyes de Newton que rigen todo el comportamiento dinámico de las partículas, una vez conocidas las fuerzas. En la Sección 4 se hablará sobre los distintos tipos de fuerzas que vamos a encontrarnos a lo largo del curso. En la Sección 5 se estudiarán los conceptos de trabajo, potencia y energía, esta última primero en general y luego la energía cinética en particular, se relacionarán estas magnitudes y se enunciará el teorema de las fuerzas vivas. La Sección 6 tratará sobre un tipo específico de fuerzas, las conservativas, y de cómo para estas fuerzas se puede definir una magnitud escalar conocida como energía potencial. En la Sección 7 se enunciará un teorema fundamental en la mecánica, como es el principio de conservación de la energía mecánica. El tema finaliza en la Sección 8 estudiando las colisiones entre partículas.

2. Cinemática

Como ya se ha apuntado con anterioridad, la cinemática es la parte de la mecánica que estudia el movimiento, sin atender a las causas que lo provoca. Comenzaremos introduciendo los conceptos fundamentales sobre los que se construirá la teoría.

2.1. Espacio, tiempo y móvil

Los conceptos de espacio, tiempo y móvil son fundamentales para el desarrollo conceptual de la mecánica clásica y sus definiciones intentan plasmar la intuición más común sobre ellos.

- *Espacio absoluto.* Es el escenario donde ocurren los fenómenos físicos. Por un lado se considera homogéneo y por otro que las leyes de la física son válidas en todo el espacio. El espacio se describe matemáticamente como un espacio vectorial cartesiano de tres dimensiones, de forma que para su correcta descripción necesita de un origen de coordenadas y tres ejes. Las distancias y posiciones en el espacio se miden en *metros* (m) en el S.I. (sistema internacional) y en *centímetros* (cm) en el CGS (sistema cegesimal).

- *Tiempo absoluto.* Es la variable respecto de la cual se parametriza el movimiento. Se postula que transcurre uniformemente e igual en todas la regiones del espacio. El tiempo se mide en *segundos* (s) en todos los sistemas de unidades.
- *Móvil.* El móvil más simple sería la *masa puntual*, *punto material* o *partícula puntual*, que sería un cuerpo muy pequeño (sólo ocupa un punto matemático en el espacio), pero que posee una masa finita. Por supuesto es un idealización, pero muchos móviles se pueden considerar puntuales dependiendo de la escala en la que se trabaje.

2.2. Descripción matemática del movimiento

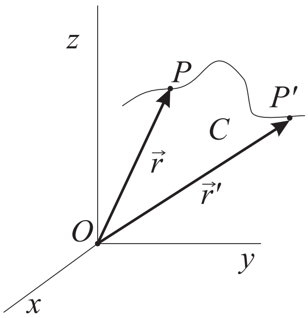

Figura 1: *Vector posición $\vec{r}$ de una partícula en dos instantes distintos y la trayectoria recorrida.*

La posición de una partícula puntual en el espacio queda determinada por su vector de posición $\vec{r}$, que corresponde al vector que tiene como inicio el origen de coordenadas O y como final el punto P donde se encuentra la partícula. Al moverse ésta, el extremo del vector $\vec{r}$ irá cambiando de unos puntos a otros, de forma que la unión de estos puntos será una curva C en el espacio que se conoce como *trayectoria*, lo que queda representado en la Figura 1.

El movimiento de una partícula queda determinado si se conoce su posición en los distintos instantes de tiempo t, es decir, si se conoce $\vec{r} = \vec{r}(t)$. En un sistema de coordenadas cartesiano, conocer el vector $\vec{r}$ en todo instante es lo mismo que conocer cada una de sus coordenadas $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$, ya que:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$$

donde $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son versores en la dirección de los ejes cartesianos coordenados. A esta expresión se le conoce como *ecuación del movimiento.*

El desplazamiento se define como el espacio recorrido por el móvil, es decir la longitud de la trayectoria recorrida, se notará como s y también estará en función del tiempo $s = s(t)$. El desplazamiento estará relacionado con la variación del vector de posición $\Delta\vec{r}$, de forma que para un movimiento rectilíneo se tiene que $\Delta s = |\Delta r| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$. Sin embargo, si el movimiento es curvilíneo, en general, el desplazamiento no será igual al módulo de la variación del vector de posición.

2.3. Velocidad

Una partícula pasa de un punto P, situado en una posición $\vec{r}$, a un punto Q, situado en una posición $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, en un intervalo de tiempo Δt, siguiendo una trayectoria curvilínea. Así, recorrerá un espacio Δs, al pasar del $\vec{r}$ a $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. Esta situación se ilustra en la Figura 2, donde puede verse como $\Delta s > |\Delta\vec{r}|$. La relación entre el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el tiempo transcurrido Δt se denomina *velocidad media* $< \vec{v} >$:

$$< \vec{v} >= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

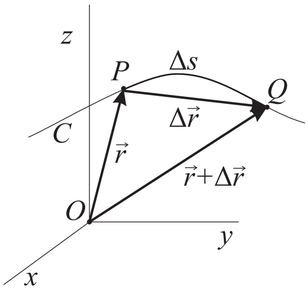

Figura 2: *Desplazamiento de una partícula.*

Es muy importante notar que la velocidad media es un **vector**, de la misma dirección (secante a la trayectoria) y el mismo sentido que el vector $\Delta\vec{r}$.

La velocidad definida de esta manera depende del intervalo de tiempo Δt que se quiera tomar para medirla. Así, si el intervalo Δt fuese, por ejemplo, menor que el que se representa en la Figura 2, el punto Q estaría más cerca del punto P, y el vector velocidad media no sólo tendría otro módulo sino que tendría otra dirección. Esta dependencia de la velocidad media con Δt hace que esta magnitud sólo sea útil en trayectorias rectas donde $<\vec{v}>$ sea constante. Para evitar esta dependencia, se realiza en la definición de $<\vec{v}>$ el límite $\Delta t \to 0$, definiendo de esta froma la *velocidad instantánea* o simplemente *velocidad*, $\vec{v}$, como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Al definirse como espacio por unidad de tiempo, las velocidades, tanto la media como la instantánea, se miden en *metros por segundo* (m/s) en el S.I. y en *centímetros por segundo* (cm/s) en el CGS.

Como cualquier vector, el vector velocidad se puede expresar en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

La expresión $\vec{v} = \vec{v}(t)$, es decir la expresión que proporciona la velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo, se conoce como *ecuación de la velocidad*.

El vector velocidad se puede expresar como $\vec{v} = v\hat{e}_t$, es decir, el vector velocidad es igual a su módulo por un versor $\hat{e}_t$ que lleva la misma dirección que $d\vec{r}$, por lo que es tangente a la trayectoria. El vector $d\vec{r}$ se define como el vector $\Delta\vec{r}$ de la Figura 2, para un punto Q infinitamente próximo al punto P, siendo su módulo $ds = |d\vec{r}|$.

Demostración: *Que la velocidad $\vec{v}$ se puede expresar como $\vec{v} = v\hat{e}_t$ se puede ver si se divide y multiplica por el espacio recorrido en la definición de velocidad y se opera como sigue:*

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds}$$

Un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ se puede considerar como rectilíneo, por lo que $ds = |d\vec{r}|$. Entonces el segundo cociente de la anterior expresión es igual al vector $d\vec{r}$ dividido por su módulo, es decir, un versor en la dirección de $d\vec{r}$. Por otro lado, el espacio recorrido en el paso infinitesimal es $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, por lo que:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} =$$
$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v$$

El resultado vuelve a ser $\vec{v} = v\hat{e}_t$. ■

2.4. Aceleración

La aceleración proporciona la variación del vector velocidad por unidad de tiempo. De igual manera que se definió la velocidad media y, mediante el paso al límite, velocidad instantánea, se puede definir *aceleración media*, $< \vec{a} >$:

$$< \vec{a} >= \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Como esta definición depende del intervalo de tiempo, se hace el límite $\Delta t \to 0$ para definir la *aceleración instantánea*, $\vec{a}$, como:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Como cualquier vector, el vector aceleración se puede expresar en función de sus componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

En este caso, la dirección del vector aceleración, en general, no es ni tangente ni normal al movimiento, pero apunta siempre hacia la concavidad de la trayectoria (hacia el "interior" de la curva que esté describiendo la trayectoria en ese punto).

Debido a su definición las aceleraciones, tanto la media como la instantánea, se miden en *metros por segundo al cuadrado* (m/s^2) en el S.I. y en *centímetros por segundo al cuadrado* (cm/s^2) en el CGS.

2.5. Componentes intrínsecas de la aceleración

El vector aceleración se puede descomponer en dos vectores, uno normal o perpendicular al movimiento, y otro tangente. La primera de estas dos componentes se conoce como *aceleración normal*, a_n, y la segunda como *aceleración tangencial*, a_t. Sí la dirección normal a la trayectoria se caracteriza por el versor $\hat{e}_n$ (apuntando hacia el centro de curvatura), la aceleración en función de estas dos componentes queda:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_t\hat{e}_t + a_n\hat{e}_n$$

Las expresiones de las dos componentes son:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \quad \text{y} \quad a_n = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en un punto.

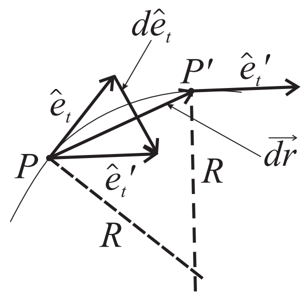

Figura 3: *Esquema de dos puntos P y P', separados un desplazamiento infinitesimal.*

Demostración: *El vector aceleración es la derivada del vector velocidad, pero éste último se puede expresar como $\vec{v} = v\hat{e}_t$. Introduciendo esto en la definición de la aceleración queda*

$$\vec{a} = \frac{d(v\hat{e}_t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} \tag{2}$$

Del primer término de la anterior expresión se deduce la expresión de a_t y del segundo término a_n. Para esto último, se parte de que $\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t = 1$. Si esta igualdad se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{d(\hat{e}_t \cdot \hat{e}_t)}{dt} = \frac{d\hat{e}_t}{dt} \cdot \hat{e}_t + \hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 2\hat{e}_t \cdot \frac{d\hat{e}_t}{dt} = 0$$

Por lo que los vectores $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$ y $\hat{e}_t$ son perpendiculares. Así, el vector $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$ es normal a $\hat{e}_t$, en el plano que definen dos tangentes consecutivas (plano oscuratriz) y hacia la concavidad, o lo que es lo mismo, lleva la misma dirección que el versor $\hat{e}_n$. Falta obtener su módulo. Para ello se observa la Figura 3. En esta figura se ven dos puntos P y P', que están separados un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. Por perpendicularidad de triángulos se puede ver que el triángulo formado por $\hat{e}_t$, $\hat{e}'_t$ y $d\hat{e}_t$ es equivalente al formado por los dos radios R y el vector desplazamiento $d\vec{r}$. Por tanto, se debe cumplir que:

$$\frac{|d\hat{e}_t|}{|\hat{e}_t|} = \frac{|d\vec{r}|}{R}$$

Ahora, el denominador del miembro de la izquierda es el módulo de un versor, por lo que es igual a uno, y el módulo del vector desplazamiento infinitesimal es ds. Con esto, el módulo vector $d\hat{e}_t$ queda:

$$|d\hat{e}_t| = \frac{ds}{R}$$

El módulo del vector $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$, será por tanto:

$$\left|\frac{d\hat{e}_t}{dt}\right| = \frac{|d\hat{e}_t|}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}$$

pero ya se vio, cuando se habló de velocidad instantánea, que $\frac{ds}{dt}$ es igual al módulo de la velocidad, con lo que el vector $\frac{d\hat{e}_t}{dt}$ queda:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{v}{R}\hat{e}_n$$

Si esta última expresión se tiene en cuenta en la expresión del vector aceleración (2), se obtiene la expresión de la aceleración normal que aparece en (1). ■

2.6. Tipos de movimiento

A continuación se enumeran ciertos movimientos comunes y sus ecuaciones del movimiento y de la velocidad.

2.6.1. Movimiento rectilíneo uniforme

En este caso $\vec{a} = \vec{0}$, por lo que el vector velocidad será una constante que llamaremos $\vec{v}_0$. Como no existe aceleración, la velocidad será siempre la misma, y la ecuación de la velocidad queda:

$$\vec{v} = \vec{v}_0$$

Según la definición de velocidad

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_0 dt = d\vec{r}$$

y si en $t = 0$ la partícula se encuentra en $\vec{r}_0$, la anterior ecuación se puede integrar

$$\int_0^t \vec{v}_0 dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \Rightarrow \vec{v}_0 t = \vec{r} - \vec{r}_0$$

donde se ha tenido en cuenta que $\vec{v}_0$ es constante. Si se despeja la posición en función del tiempo se obtiene la ecuaciones del movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t$$

Puede verse que, como $\vec{v}_0$ es una constante, la ecuación del movimiento es en realidad la ecuación de una recta, como era de esperar ya que el movimiento es **rectilíneo**. Para ver esto de forma explícita tomemos el eje x en la dirección de $\vec{v}_0$, por tanto $\vec{v}_0 = v_0 \hat{\imath}$, entonces la anterior expresión se puede escribir:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = x_0 + v_0 t \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

lo que corresponde con la ecuación de una recta paralela al eje x.

2.6.2. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

En este caso la aceleración es constante $\vec{a}$ y la velocidad inicial $\vec{v}_0$ lleva la misma dirección que la aceleración (lo que se nota como $\vec{v}_0||\vec{a}$).

Para calcular la ecuación de la velocidad, se utiliza la definición de la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{a}dt = d\vec{v}$$

Como en $t = 0$ la partícula lleva una velocidad $\vec{v}_0$, la anterior ecuación se puede integrar resultando

$$\int_0^t \vec{a}dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} \;\Rightarrow\; \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}dt$$

con lo que se obtiene la ecuación de la velocidad:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Para que el movimiento sea rectilíneo, la velocidad debe llevar siempre la misma dirección al variar el tiempo, y para que esto suceda $\vec{v}_0$ y $\vec{a}$ deben tener la misma dirección, lo que es fácil de deducir de la anterior ecuación y que es la condición que se ha exigido inicialmente.

Para obtener la ecuación del movimiento, sólo hay que repetir los pasos que se realizaron para el movimiento rectilíneo uniforme, pero utilizando la ecuación de la velocidad anteriormente calculada:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{v}dt = d\vec{r} \;\Rightarrow\; (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt = d\vec{r}$$

y si en $t = 0$ la partícula se encuentra en $\vec{r}_0$, la anterior ecuación se puede integrar

$$\int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Si se despeja la posición en función del tiempo se obtiene la ecuación del movimiento:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Se puede elegir el eje x en la misma dirección que la aceleración y la velocidad, de esta manera las anteriores ecuaciones quedarían:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} v_x = v_0 + at \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{array}\right.$$

lo que corresponde con un movimiento rectilíneo.

2.6.3. Movimiento con aceleración constante

Dentro de este caso se encuentra el anterior movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, pero también engloba otros movimientos. Como su nombre indica, la aceleración es constante, $\vec{a} = \overrightarrow{cte}$, y actuando de forma análoga a la realizada anteriormente se puede obtener la ecuación del movimiento y de la velocidad:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

La diferencia con el caso anterior es que ahora no se requiere que le velocidad inicial y la aceleración tengan la misma dirección. Si se toma el eje y en la misma dirección que la aceleración, tal que $\vec{a} = a\hat{\jmath}$, las anteriores ecuaciones quedan:

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a t^2 \\ z = z_0 + v_{0z} t \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{l} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \\ v_z = v_{0z} \end{array}\right.$$

El ejemplo más típico de un movimiento de aceleración constante que no sea un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es un tiro parabólico. En este caso el cuerpo sale disparado con una velocidad $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$ desde un punto $\vec{r}_0$. Una vez en el aire, sólo afecta la fuerza de la gravedad, y la aceleración $\vec{a} = -g\hat{\jmath}$, con g la aceleración de la gravedad (el eje y es vertical y el eje x horizontal). Si la partícula permanece suficientemente cerca de la superficie terrestre, la aceleración de la gravedad se puede considerar constante. Por tanto, es un movimiento de aceleración constante pero es fácil comprobar que su trayectoria no será rectilínea sino una parábola (salvo si $v_{0y} = 0$, que no sería un tiro parabólico sino uno vertical).

2.7. Relatividad del movimiento

Para poder hablar de posición hemos necesitado un *sistema de referencia*, ya que el movimiento es el cambio de posición, y la posición se define como el vector dirigido del origen del sistema de referencia hasta el punto. Así, una partícula estará en movimiento cuando su vector de posición varíe en el sistema de referencia considerado. Por tanto, el movimiento se considera *relativo* al sistema de referencia elegido. Por ejemplo, puedo ver que la silla en la que me siento no se mueve, por lo menos si utilizo un sistema de referencia fijo en el suelo. Sin embargo, visto desde el espacio, la silla se mueve junto con la tierra, que se desplaza a una velocidad enorme en el sistema solar. No sólo el hecho de si se mueve o no es relativo, sino que también lo será el tipo de movimiento.

2.7.1. Posiciones, velocidades y aceleraciones relativas

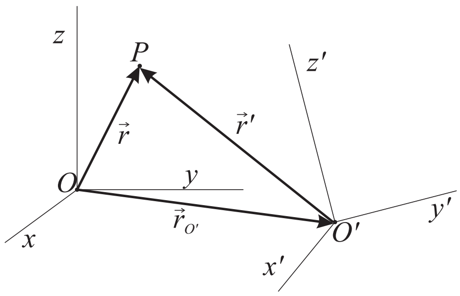

Figura 4: *Posición de una partícula desde dos sistemas de referencia.*

Como hemos visto que el movimiento de una partícula es un concepto relativo, ya que depende del sistema de referencia que se esté considerando. Si se tienen dos sistemas de referencias como los que se muestran en la Figura 4, el punto P donde se encuentra una partícula se describirá mediante distintos vectores de posición en cada uno de los sistemas de referencia. En el caso del sistema de referencia 1 (definido por los ejes x, y, z y el origen O), el punto P se describe mediante el vector de posición $\vec{r}$; mientras que en el sistema de referencia 2 (definido por los ejes x', y', z' y el origen O'), el mismo punto se describe con el vector de posición $\vec{r}'$. El punto es el mismo, pero los vectores de posición son distintos al utilizarse distintos sistemas de referencia en cada caso. Éste es el sentido del concepto *relatividad del movimiento*.

Por supuesto, si se conoce el vector de posición $\vec{r}_{O'}$ del origen O' (origen del sistema 2) en el sistema de referencia 1, es muy sencillo relacionar los vectores de posición del punto P en ambos sitemas:

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

Esta misma discusión se puede realizar para la velocidad. Así, si se deriva la anterior ecuación se obtiene la relación entre la velocidad de la partícula respecto del sistema de referencia 1, $\vec{v}$, y la velocidad en el sistema de referencia 2, $\vec{v}'$:

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}'$$

donde $\vec{v}_{O'}$ es la velocidad del origen de coordenadas del sistema 2, O', que "ve" el sistema de coordenadas 1. Por supuesto, si un sistema de referencia no se mueve respecto el otro $\vec{v}_{O'} = 0$ y los dos sistema verán la misma velocidad.

Si se vuelve a derivar la última ecuación se obtiene la relación entre las aceleraciones que "ven" los sistemas 1 y 2, $\vec{a}$ y $\vec{a}'$:

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}'$$

donde $\vec{a}_{O'}$ es la aceleración de O' vista desde el sistema de referencia 1.

3. Leyes de la dinámica clásica

Por la experiencia sabemos que un cuerpo se mueve como resultado de la interacción que otros cuerpos que lo rodean realizan sobre él. Estas interacciones se describen con la introducción del concepto físico de *fuerza*. La mecánica se encarga de establecer una relación entre las fuerzas o interacciones y los movimientos que provoca.

La mecánica clásica, que es la que estudiaremos en este curso, se encargará de establecer la relación entre interacción y movimiento para las partículas no demasiado grandes ni demasiado pequeñas, moviéndose a velocidades no demasiado altas. Es decir, para los fenómenos que son observados comúnmente. La mecánica relativista y la mecánica cuántica, son las partes de la física encargadas de extender la anterior relación a los cuerpos grandes y/o moviéndose a gran velocidad, la primera, y para los cuerpos pequeños, la segunda.

La mecánica proporciona lo que se llama *leyes del movimiento*, que son relaciones entre las fuerzas y el movimiento que éstas provocan. Sin embargo, no se encarga de obtener la expresión propia de las fuerzas, ya que de esto se encargan otra ramas de la física a través de la experimentación. Estas expresiones de las fuerzas se recogen en las *leyes de fuerzas*.

Las leyes de movimiento no son más que las conocidas leyes de Newton, y permiten predecir cómo se moverán los cuerpos **una vez** conocidas las leyes de fuerzas.

Las leyes de fuerza proporcionan las expresiones matemáticas de éstas en función del medio que rodea a la partícula o cuerpo considerado.

3.1. Fuerza y masa

Estos dos conceptos son los más importantes en la dinámica, al igual que lo fueron la posición velocidad y aceleración en la cinemática (Sección 2).

- *Masa.* Es una medida de la inercia o resistencia de un objeto a cambiar su estado de movimiento. Es escalar y aditiva.

- *Fuerza.* Es una medida de la interacción del medio ambiente que rodea a la partícula sobre ésta. Como la interacción tiene carácter direccional, las fuerzas serán vectoriales.

3.2. Primera ley de Newton o ley de inercia

La primera ley de Newton dice:

> *Todo cuerpo permanece en su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme a menos que se le obligue a variar dicho estado mediante fuerzas que actúen sobre él.*

Esta ley viene a decir dos cosas fundamentales. Por un lado establece que el reposo y el movimiento rectilíneo son una misma cosa, y por otro permite determinar la **ausencia** de fuerza.

La primera ley proporciona un procedimiento operacional para detectar cuándo actúa una fuerza neta sobre un cuerpo: cuando no siga un movimiento rectilíneo uniforme. Por tanto, la presencia de aceleración implicará la presencia de fuerza. El principal problema radica en que la aceleración es una magnitud relativa, dependiente del sistema de referencia elegido.

La primera ley es válida sólo si el sistema de referencia que se utiliza no tiene aceleración, lo que se conoce como un sistema de referencia *inercial*. Si se trabaja como un sistema de referencia que tiene una cierta aceleración $\vec{a}$, una partícula en reposo se "vería" en este sistema con una aceleración $-\vec{a}$. Por ejemplo, si nos encontramos en un tren en reposo, con una bola en la mesa delante de nosotros y el tren arranca y comienza a aumentar su velocidad, veremos cómo la bola se desplaza hacia nosotros. Un observador fuera del tren (inercial) podrá explicar perfectamente por qué la bola se desplaza, pero un observador dentro del tren (no inercial) tendrá que recurrir a una fuerza misteriosa que hace rodar la bola.

Por tanto, hay que buscar sistemas de referencia que sean inerciales (sin aceleración), lo que no es tan fácil como parece. Por ejemplo, un sistema de referencia centrado en la superficie terrestre posee una aceleración debida a la rotación de la Tierra, que es del orden de 0,03 $\mathrm{m/s^2}$ (dependiendo de la latitud). Si se toma un sistema de referencia en el centro de la Tierra, pero que no gire con ella, también tendrá una aceleración debida a la traslación entorno al Sol, siendo del orden de 0,006 $\mathrm{m/s^2}$. Pero si nos vamos a un sistema de referencia fijo en el Sol, también existirá una aceleración debida a la rotación del Sistema Solar entorno al centro de la galaxia, que se estima del orden de $3 \cdot 10^{-10}$ $\mathrm{m/s^2}$.

3.3. Segunda ley de Newton

La segunda ley de Newton dice

La variación del movimiento de una partícula es proporcional a la fuerza que actúa sobre el cuerpo y se realiza en la dirección de la recta en la que actúa la fuerza.

Matemáticamente, esta ley se puede expresar como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3}$$

donde $\vec{F}$ es la *resultante de las fuerza* (la suma de todas las fuerzas), $\vec{a}$ es el vector aceleración que se estudió en cinemática y representa "la variación del movimiento", y m es la constante de proporcionalidad entre las dos magnitudes que se conoce como *masa de la partícula*. Esta ley, al igual que la primera, sólo se puede aplicar cuando el sistema de referencia que se utiliza es inercial. Si el sistema no es inercial, la ecuación (3) no se cumplirá.

Es conveniente resaltar que la ecuación (3) es una ecuación vectorial, lo que implica **tres** igualdades o ecuaciones escalares.

La segunda ley de Newton proporciona una procedimiento operacional para medir fuerzas. Estas fuerzas son vectores, por lo que cumple el *principio de superposición*, es decir, se pueden sumar vectorialmente. Esto, al igual que cualquier resultado obtenido directamente de las leyes de Newton, es un hecho experimental y no es el resultado de una definición o una deducción, ya que las leyes se obtuvieron directamente de la experimentación.

En el caso en el que la resultante de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sea cero, de la expresión (3) se obtiene que la aceleración será nula y por tanto la velocidad será constante, obteniéndose de esta forma el mismo resultado que con la primera ley de Newton.

Las unidades de masa son el *kilogramo* (kg) en el S.I. y el *gramo* (g) en el CGS.; por lo que las unidades de fuerza serán $\mathrm{kg\,m/s^2}$ en el S.I., que recibe el nombre de *Newton* ($1\ \mathrm{N} = 1\mathrm{kg\,m/s^2}$), y $\mathrm{g\,cm/s^2}$ en el C.G.S., que recibe el nombre de *dina* ($1\ \mathrm{din} = 1\mathrm{g\,cm/s^2} = 1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{N}$).

3.4. Momento lineal o cantidad de movimiento

La segunda ley de Newton se refiere a la "variación del movimiento" de un cuerpo, y este "movimiento" se ha identificado con velocidad (ya que la variación de movimiento se ha identificado con aceleración). Sin embargo, el estado de movimiento de un tren a 30 km/h y de un mosquito a 30 km/h no es el mismo (si no me cree póngase delante de un tren y de un mosquito y compruebe por sí mismo si la situación física es la misma). Este estado de movimiento se describe más correctamente con una magnitud llamada *momento lineal* o *cantidad de movimiento*, que se define como el producto de la masa de la partícula por su velocidad:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

El momento lineal se mide en $\mathrm{kg\,m/s}$, en el S.I.

Con esta definición la segunda ley de Newton (3) se puede escribir de una forma más general, resultando:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{4}$$

Esta expresión de la segunda ley incluye la expresión (3), en el caso de partículas de masa constante, pero permite extender la segunda ley a partículas de masa variable, como es el caso de cohetes o aviones a reacción.

La expresión (4) de la segunda ley de Newton también permite reformular la primera ley, de forma que en ausencia de fuerza neta ($\vec{F} = \vec{0}$), se tiene que el momento lineal de la partícula permanece constante ($\vec{p} = \overrightarrow{cte}$). Este resultado se conoce como *principio de conservación del momento lineal para una partícula.*

3.5. Tercera ley de Newton

La tercera ley de Newton dice

> *A toda acción se le opone siempre una reacción igual: osea, las acciones mutuas entre dos cuerpos, uno sobre otro, se dirigen siempre en sentidos opuestos.*

Esto quiere decir que si la fuerza que el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 se nota $\vec{F}_{12}$, y la fuerza que el cuerpo 2 ejerce 1 se nota como $\vec{F}_{21}$, se tiene:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{5}$$

Así, una fuerza por sí sola es únicamente la mitad de una interacción mutua entre dos cuerpos, y cualquiera de las dos partes de la interacción se puede considerar como acción y cualquiera como reacción.

Es importante notar que las fuerzas $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ no se anulan, desde el punto de vista de la dinámica de una partícula, ya que **actúan sobre cuerpos distintos**. Si sobre los cuerpo 1 y 2 sólo actúan las anteriores dos fuerzas, aplicando la segunda ley de Newton (4) sobre estos cuerpos 1 y 2, se tiene:

$$\vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{F}_{12} = \frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

Sumando las dos ecuaciones se tiene:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt}$$

pero como se cumple (5), entonces la suma de los dos momentos lineales individuales de las dos partículas es constante:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \overrightarrow{cte}$$

Este resultado se conoce como *principio de conservación del momento lineal para dos partículas.* Este resultado es fácil de extender a más partículas, resultando que para un sistema de partículas, si sólo actúan fuerzas internas (entre las partículas), la suma de los momentos lineales de todas las partículas se conserva. Este resultado es fundamental para el estudio del movimiento de sistemas de partículas, pero dicho estudio no se realizará en este curso.

4. Tipos de fuerza

Como ya se dijo en la sección anterior, una vez conocidas la fuerzas, las leyes de Newton proporcionan una descripción completa del movimiento de la partícula. Sin embargo, la obtención de la expresión de las fuerzas no es un trabajo propio de la mecánica, sino que se tienen que obtener mediante experimentación u otras ramas de la física. Estas expresiones son las que antes hemos llamado leyes de fuerza. A continuación se estudiarán brevemente las fuerzas más comunes con las que podemos encontrarnos.

4.1. Fuerzas fundamentales

Aunque existen muchas situaciones donde las fuerzas toman expresiones diversas, todas las interacciones se pueden reducir a cuatro interacciones o fuerzas fundamentales: gravitatoria, electromagnética, fuerte y débil.

La interacción fuerte es la responsable de la estabilidad de los núcleos atómicos, estableciéndose entre *hadrones*; mientras que la interacción débil se produce entre cualquier tipo de partículas elementales, siendo de mucho menor valor que la interacción fuerte. Estas dos interacciones son de corto alcance y sólo tienen efectos a escala nuclear.

La fuerza gravitatoria que una masa m_1 ejerce sobre otra masa m_2 resulta:

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{R_{12}^3}\vec{R}_{12}$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\vec{R}_{12}$ es el vector dirigido de m_1 a m_2. Esta expresión se conoce como Ley de Gravitación Universal.

La fuerza electromagnética se establece entre cargas. Para una carga, q, moviéndose dentro de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$, la fuerza que los campos ejercen sobre la carga es:

$$\vec{F}_e = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad de la partícula.

Los dos tipos de fuerzas anteriores son fuerzas de largo alcance y, por tanto, son las únicas que intervienen significativamente en los fenómenos macrocópicos. Sin embargo, para un electrón se tiene que el cociente F_e/F_g es del orden de 10^{36}, por lo que siempre que haya fenómenos eléctricos el efecto de las fuerzas gravitatorias se puede despreciar. Por tanto, todos los fenómenos macroscópicos, salvo el peso, se deben a interacciones electromagnéticas. Aún así, es imposible explicar muchas de las fuerzas cotidianas (tensiones, fuerzas de rozamientos, fuerzas impulsivas,...) a partir de estas fuerzas fundamentales, y es necesario recurrir a la experimentación para poder explicarlas.

4.2. Peso y peso aparente

El peso es la fuerza con la que la Tierra atrae a los cuerpos que están sobre ella. Se puede medir a través de la aceleración que adquiere un cuerpo en caída libre, $\vec{g}$, que será independiente de la masa del cuerpo, de forma que el peso $\vec{P}$ es

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

La aceleración de la gravedad $\vec{g}$ depende de varios factores, como la latitud, la altura, la proximidad de grandes masas como montañas, etc.; por lo que $\vec{P}$ **no** es una propiedad intrínseca de los cuerpos, sino que varía de unas posiciones a otras.

La sensación que nosotros tenemos de la acción de la fuerza gravitatoria no proviene directamente del peso sino a través de las fuerzas que compensan o actúan como reacción a este peso. El ejemplo más habitual de estas fuerzas es la fuerza *normal* (se estudiará un poco más adelante en la Sección 4.6).

La fuerza de reacción que equilibra el peso se conoce como *peso aparente*. Cuando no hay reacción que lo equilibre, el peso aparente es nulo y a esta situación se conoce como situación de ingravidez.

Ejemplo: *Calcular el peso aparente de un cuerpo en el suelo de un ascensor acelerando.*

Cuando un cuerpo está situado en el suelo de un ascensor, las fuerzas que actúan sobre él son el peso, vertical y hacia abajo, y la fuerza normal que el suelo ejerce sobre el cuerpo y evita que el cuerpo "penetre" en el suelo, que será también vertical pero hacia arriba. Por tanto, la suma de estas fuerzas será igual a la masa del cuerpo por la aceleración del ascensor. La componente vertical de la segunda ley de Newton quedaría:

$$N - mg = ma$$

donde a es la aceleración que lleva el ascensor (y por ello el cuerpo que se mueve con él). La fuerza que aparece como reacción al peso es la normal, y por lo tanto ésta es el peso aparente, y resulta:

$$N = m(g + a)$$

Si se coloca una balanza en el suelo del ascensor y el cuerpo encima, cuando el ascensor no acelera, la normal será $N = mg$ y éste será el peso aparente que medirá la balanza. Pero si el ascensor acelera hacia arriba ($a > 0$), la normal será mayor que mg y la balanza medirá un peso mayor que el que en realidad tiene. Y al contrario, si el ascensor lleva una aceleración hacia abajo ($a < 0$), la normal será menor que mg y la balanza medirá un peso menor que el que en realidad tiene. El caso límite será cuando el ascensor tenga una aceleración hacia abajo igual a la aceleración de la gravedad, entonces $N = 0$ y el peso aparente es nulo, lo que antes se ha llamado situación de ingravidez. (¿Qué pasará cuando la aceleración sea hacia abajo y mayor que la gravedad?)

4.3. Fuerza de rozamiento entre sólidos

Es una fuerza de tipo electromagnético y su origen es la repulsión que se ejerce entre moléculas de distintos materiales en las superficies imperfectas en contacto. Aún así, no es posible estudiar sus propiedades ni su expresión partiendo de consideraciones electromagnéticas, sino que hay que recurrir a la experiencia para poder tratarla.

A través de experimentos se observa que la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento **relativo** entra las superficies en contacto, o bien a la tendencia al movimiento (no es necesario que se muevan para que aparezcan estas fuerzas). Dentro de ciertos márgenes es independiente de la velocidad de las superficies y del área de las mismas, siendo directamente proporcional a la fuerza normal que se genera entre ellas. Esto implica que si no hay fuerza normal entre las superficies (no hay contacto) no existe fuerza de rozamiento.

Existen dos tipos de fuerzas de rozamiento: la fuerza de rozamiento estática y la fuerza de rozamiento dinámica. En el primer tipo existe una tendencia al movimiento, pero no se produce movimiento relativo entre las superficies en contacto. Es el caso que ocurre cuando empujamos algo sin llegar a moverlo. Si μ_e es el coeficiente de rozamiento estático entre las dos superficies y $\vec{N}$ es la fuerza normal a las dos superficies, el módulo de la fuerza de rozamiento estática es:

$$F_{Re} \leq \mu_e N$$

La dirección es la misma que la "tendencia al movimiento" y el sentido oponiéndose a él. Es conveniente notar que la expresión de esta fuerza nos da un límite máximo, a partir del cual el cuerpo se moverá, pero no nos proporciona el valor numérico de dicha fuerza (en los problemas será una incógnita).

Por otro lado, si las superficies en contacto se mueven una respecto de otra y μ_d es el coeficiente de rozamiento dinámico entre las dos superficies, el módulo de la fuerza de rozamiento dinámica es:

$$F_{Rd} = \mu_d N$$

La dirección es la misma que la de la velocidad relativa y el sentido contrario a ésta.

4.4. Fuerza de rozamiento en fluidos

Esta fuerza es también una fuerza de rozamiento, pero en este caso no existe fuerza estática. Como tal se opone al movimiento, pero en este caso depende de las propiedades del fluido (viscosidad), de la geometría del cuerpo y es directamente proporcional a la velocidad (flujo laminar):

$$\vec{F}_r = -b\vec{v}$$

donde $b > 0$ es una constante que depende de la geometría del cuerpo y de la viscosidad del fluido. Por ejemplo, para una esfera moviéndose en el seno de un fluido newtoniano, la fuerza de rozamiento viscosa queda:

$$\vec{F}_r = -6\pi R\eta\vec{v}$$

donde R es el radio de la esfera y η es la viscosidad del fluido.

Ejemplo: *Obtener la ecuación del movimiento de un cuerpo en caída libre sufriendo la fuerza de rozamiento debido al aire. Suponer que el cuerpo se encuentra suficientemente cerca de la superficie terrestre para considerarse la gravedad constante.*

Supongamos que el cuerpo parte del reposo, por la acción de la gravedad comienza a acelerar verticalmente hacia abajo y en el momento que adquiere velocidad, aparece la fuerza resistiva hacia arriba. Por tanto, son dos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo: el peso y la fuerza de rozamiento. Según la segunda ley de Newton en la dirección vertical y sentido positivo hacia arriba se tiene:

$$F_R - P = ma$$

Sustituyendo el valor de la fuerza de rozamiento en fluidos se tiene:

$$-bv - mg = ma \;\Rightarrow\; -\frac{b}{m}v - g = \frac{dv}{dt}$$

Si notamos $B = \frac{b}{m}$, agrupamos las variables t y v en miembros distintos, se tiene:

$$dt = \frac{dv}{-Bv - g} \;\Rightarrow\; \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{-Bv-g} \;\Rightarrow\; t = -\frac{1}{B}\ln\left(\frac{Bv+g}{g}\right)$$

Y despejando la velocidad y sustituyendo el valor de B se obtiene:

$$v = \frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)$$

Se puede observar cómo inicialmente la velocidad es nula y va aumentado hacia abajo ($v > 0$) hasta que en el infinito toma un valor fijo, conocido como velocidad límite *e igual a:*

$$v_l = -\frac{mg}{b}$$

Es fácil comprobar cómo la velocidad límite corresponde con la situación en la que $F_R = mg$.

Para obtener la ecuación del movimiento no hay más que integrar la ecuación de la velocidad:

$$\frac{dy}{dt} = v = \frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right) \;\Rightarrow\; \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \frac{mg}{b}\left(e^{-\frac{bt}{m}} - 1\right)dt \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y - y_0 = \frac{mg}{b}\left(-\frac{m}{b}e^{-\frac{bt}{m}} + \frac{m}{b} + t\right)$$

Lo que permite obtener la posición:

$$y = y_0 + \frac{mg}{b}\left(t + \frac{m}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)\right)$$

Como puede verse, la ecuación del movimiento dista mucho de la típica ecuación de caída libre, en la cual el espacio aumenta con el cuadrado del tiempo. Si el rozamiento es pequeño, la exponencial se puede expresar siguiendo un desarrollo en serie de Tailor como:

$$e^{-\frac{bt}{m}} = 1 - \frac{b}{m}t + \frac{1}{2}\frac{b^2}{m^2}t^2 + \ldots$$

Si terminamos en orden 2 (despreciamos potencias de b mayores de 2, ya que serán muy pequeñas) y se sustituye este desarrollo en la ecuación del movimiento nos queda:

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

Que corresponde con la ecuación del movimiento en ausencia de rozamiento.

4.5. Fuerzas elásticas

La fuerza elástica es la fuerza recuperadora que aparece al deformarse un sólido y obliga a que recupere su forma original. En general depende de la naturaleza del cuerpo y de cuánto se haya deformado. Dentro del margen de elasticidad (antes de que la deformación sea tan grande que se vuelva permanente o se rompa) y para deformaciones en una dimensión (que tomaremos como el eje x), la expresión es:

$$\vec{F}_e = -k\Delta x\hat{\imath}$$

donde k es la constante elástica del material ($k > 0$) y Δx es la deformación que sufre el material. Como puede verse la fuerza actúa en sentido contrario a la deformación. Esta expresión se conoce como Ley de Hooke.

El caso más típico que se suele encontrar es el de muelles, de forma que k se conoce como la constante del muelle y Δx es lo alargado o encogido que se encuentre el muelle desde su posición relajada (la elongación del muelle).

Ejemplo: *Obtener la ecuación del movimiento de un cuerpo sometido únicamente a la acción de una fuerza elástica. Suponer que cuando el cuerpo se encuentra en el origen de coordenadas el muelle está relajado y que inicialmente el cuerpo se encuentra en reposo en $x = A$.*

Como el cuerpo se encuentra originalmente en reposo y el origen de coordenadas corresponde con la situación en la que el muelle está relajado, el cuerpo se mueve sobre el eje x bajo la acción de una fuerza en la dirección $\hat{\imath}$ y de módulo $F_e = -kx$. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección $\hat{\imath}$, queda:

$$F_e = ma \;\Rightarrow\; -kx = ma$$

Si se tiene en cuenta la definición de la aceleración, la ecuación anterior queda:

$$-\frac{k}{m}x = \frac{dv}{dt}$$

Se observa cómo hay dos funciones x y v que dependen del tiempo de una forma desconocida. No se puede realizar el mismo procedimiento que se hizo para la fuerza de rozamiento en fluidos, ya que no hay una sola función, a parte del tiempo, sino dos. Por eso, hay que intentar eliminar una de las funciones o el tiempo, para poder despejar y luego integrar. Para eso se multiplica y se divide el término derecho de la ecuación por la velocidad, se utiliza la definición de velocidad y se simplifica:

$$-\frac{k}{m}x = \frac{v}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{v}{\frac{dx}{dt}}\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx} \;\Rightarrow\; -\frac{k}{m}x = v\frac{dv}{dx}$$

Una vez realizado este procedimiento lo que se tiene es una igualdad funcional en la que sólo intervienen dos funciones x y v, por lo que se puede despejar y luego integrar:

$$-\frac{k}{m}xdx = vdv \;\Rightarrow\; -\int_A^x \frac{k}{m}xdx = \int_0^v vdv$$

donde se ha tenido en cuenta las condiciones iniciales indicadas. La integral es fácil de realizar y permite obtener la velocidad en función de la posición:

$$\frac{k}{m}\left(\frac{A^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}$$

Sin embargo, esto no es lo que se pide, ya que la ecuación del movimiento corresponde con la expresión de la posición en función del tiempo. Para obtenerla hay que tener en cuenta la definición de la velocidad como $v = \frac{dx}{dt}$, que sustituyendo en la anterior ecuación queda:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}} = dt \;\Rightarrow\; \int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}} = \int_0^t dt$$

La integral de la izquierda se puede hacer fácilmente sin más que hacer la transformación

$$\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{k}{m}\left(A^2 - x^2\right)}} = \sqrt{\frac{m}{k}}\int_A^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

que es una integral inmediata, cuya primitiva es $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right)$. *Con esto la igualdad que relaciona x y t queda:*

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right) - \operatorname{arcsen}\left(\frac{A}{A}\right)\right) = t$$

pero el arcoseno de uno es igual a cero, con lo que la anterior ecuación queda:

$$\sqrt{\frac{m}{k}}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right) = t \;\Rightarrow\; \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Si se toma seno en ambas partes de la igualdad, se obtiene la ecuación del movimiento:

$$x = A\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Si se define $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la anterior ecuación queda como:

$$x = A\operatorname{sen}\left(\omega t\right)$$

que corresponde con la ecuación de un movimiento oscilatorio armónico simple, de frecuencia angular ω, amplitud A y fase inicial nula.

4.6. Fuerzas de ligadura

Todas las fuerzas que se han estudiado hasta ahora son fuerzas activas, es decir, pueden actuar sobre el cuerpo cambiando el estado de movimiento. Las fuerzas de ligadura, por el contrario **no** son fuerzas activas, sino que son responsables de mantener ciertas condiciones geométricas.

Por ejemplo, para un cuerpo moviéndose encima de una superficie horizontal, una condición geométrica del problema será que todo el movimiento que realice el cuerpo debe restringirse a la región por encima de la mesa, aunque haya fuerzas verticales hacia abajo. En este caso la mesa generará una fuerza perpendicular que se conoce como *fuerza normal* y que impedirá que el cuerpo atraviese la mesa.

La fuerza normal suele aparecer cuando existen superficies rígidas y es el ejemplo más común de las fuerzas de ligadura, pero existen otras muchas, como por ejemplo un cuerpo obligado a moverse a lo largo de un alambre o de un canal.

4.7. Fuerzas de inercia

Consideremos una partícula en reposo, por lo que su aceleración cumple $\vec{a} = \vec{0}$. Si describimos su movimiento desde un sistema de referencia no inercial, con aceleración $\vec{a}_0$, lo que se verá es que la partícula se mueve con una aceleración $\vec{a}' = -\vec{a}_0$. Si en el sistema de referencia no inercial intentamos aplicar la segunda ley de Newton (lo que sabemos que es incorrecto, ya que las dos primeras leyes de Newton sólo son válidas en sistemas de referencia inerciales) quedaría:

$$\vec{F} = -m\vec{a}_0$$

Por lo tanto deducimos que debe haber una fuerza, de valor $-m\vec{a}_0$ que provoque la aceleración que vemos, aunque no podamos encontrar un agente que genere dicha aceleración. Por tanto, para encontrar las fuerzas de inercia en un sistema de referencia no inercial, hay que saber de antemano cuál es la aceleración a_0 del sistema de referencia; en cuyo caso, la fuerza de inercia que actúa sobre la partícula sería:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$$

Estas fuerzas no son necesarias si se trabaja en sistemas de referencias inerciales, que es lo más cómodo y lo aconsejado en este curso.

Se suele decir que las fuerzas de inercia son fuerzas ficticias, porque no existe nada que las genere, y en este curso pensaremos precisamente esto: no existen fuerzas de inercia.

5. Trabajo y energía

Las leyes de Newton nos permiten estudiar el movimiento de una partícula una vez que se conocen las fuerzas. Concretamente, de la segunda ley de Newton se obtiene la aceleración a partir de la suma de fuerzas. Una vez que se tiene la aceleración, es un problema de cinemática el obtener la velocidad y la ecuación del movimiento.

En el caso de que las fuerzas sean funciones del tiempo, $\vec{F} = \vec{F}(t)$, se obtendrá una aceleración que es función del tiempo, de forma que es muy fácil obtener la ecuación de la velocidad (integrando una vez con respecto al tiempo) y de la posición (integrando dos veces). Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas, lo que se conoce es la fuerza en función de la posición, es decir, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, lo que produce que la aceleración sea función de la posición, y ya no es tan inmediato obtener la ecuación de la velocidad y del tiempo. Esto sucede en el caso de fuerzas de rozamiento entre fluidos o en fuerzas elásticas.

En el caso de fuerzas que dependen de la posición, es más conveniente introducir los conceptos de trabajo y energía para estudiar el movimiento. Además, el concepto de energía permite abordar problemas incluso desconociendo la ley de fuerzas, siempre que se puedan realizar suposiciones razonables sobre su naturaleza. Este concepto de energía relaciona campos de la física aparentemente inconexos, como electromagnetismo, mecánica o física de partículas.

El concepto de energía se introducirá a partir del trabajo, aunque históricamente surgieran al revés.

5.1. Trabajo

El trabajo es una magnitud física relacionada con una fuerza y mide cuánto dicha fuerza contribuye al movimiento, es decir, cuánto, a lo largo de una trayectoria, la fuerza "contribuye" o favorece el desplazamiento. Como el desplazamiento y la fuerza son vectores, una fuerza contribuirá más al movimiento cuando el vector desplazamiento y la fuerza tengan la misma dirección y sentido.

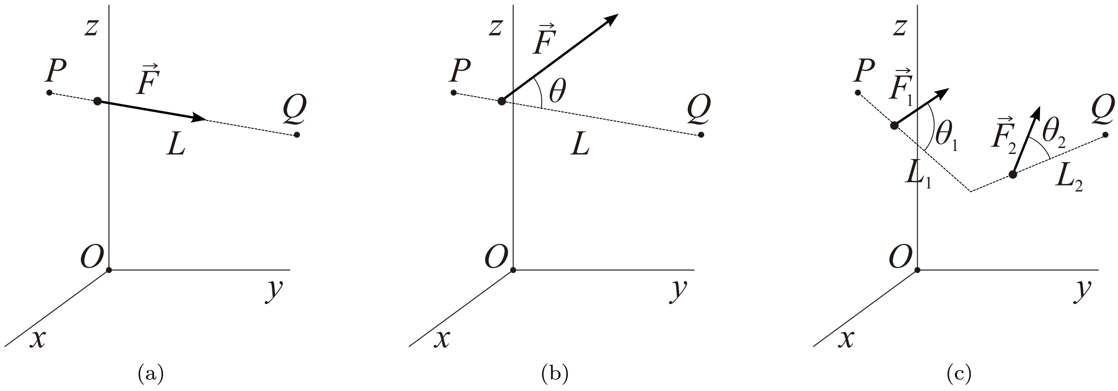

Figura 5: *Trayectorias rectas y fuerzas constantes entre dos puntos P y Q, en los casos (a) fuerza en la misma dirección y sentido que el desplazamiento; (b) fuerza formando un ángulo no nulo con el desplazamiento; (c) dos trayectos rectos, quebrados, con fuerzas formando ángulos con dichos desplazamientos.*

Así, imaginemos un cuerpo que se mueve en línea recta una distancia L entre el punto P y el punto Q, y que sobre el cuerpo se aplica una fuerza $\vec{F}$ constante en la misma dirección y sentido que el movimiento del cuerpo, tal y como se muestra en la Figura 5(a). La fuerza contribuye durante todo el camino al movimiento, ya que lleva la misma dirección y sentido que el desplazamiento. Así, el trabajo W realizado por la fuerza F durante el movimiento es:

$$W = FL$$

Si la fuerza llevase la misma dirección pero sentido contrario, la fuerza se opone al movimiento y el trabajo resultaría $W = -FL$.

Ahora, si sobre el mismo cuerpo, moviéndose de la misma manera, se aplica una fuerza $\vec{F}$ constante pero que no lleve la misma dirección que la línea recta que define la trayectoria, sino que forma un ángulo θ con ésta, tal y como se observa en la Figura 5(b), no toda la fuerza $\vec{F}$ está contribuyendo al movimiento, sino sólo la proyección de la fuerza $\vec{F}$ en la dirección de la trayectoria. Esta proyección es $F\cos(\theta)$, por lo tanto, el trabajo W realizado por la fuerza F durante el movimiento es:

$$W = F\cos(\theta)L$$

El problema aparece cuando la fuerza no es constante a lo largo del movimiento o la trayectoria no es recta. Por ejemplo, en la Figura 5(c) un cuerpo se mueve del punto P al punto Q a través de una trayectoria que consiste en dos líneas rectas, una de longitud L_1 y otra de longitud L_2. Durante el primer tramo la fuerza que se aplica es constante e igual a $\vec{F}_1$, formando un ángulo θ_1 con la trayectoria, y durante el segundo tramo es también constante, pero igual a $\vec{F}_2$ y formando un ángulo θ_2 con la trayectoria en ese tramo. Así, lo que contribuye la fuerza al movimiento será lo que contribuye durante el primer tramo más lo que contribuye durante el segundo tramo, de forma que el trabajo quedará:

$$W = F_1\cos(\theta_1)L_1 + F_2\cos(\theta_2)L_2$$

En muchas ocasiones es más fácil expresar las anteriores relaciones haciendo uso del desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el producto escalar. Así en los dos primeros ejemplos anteriores, el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ es un vector que lleva la dirección de la trayectoria, sentido de P a Q y módulo L, y el trabajo en estos dos ejemplos se puede escribir como:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Si se define de la misma forma dos desplazamientos $\Delta\vec{r}_1$ y $\Delta\vec{r}_2$ en el tercero de los ejemplos anteriores, el trabajo quedaría como:

$$W = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2$$

Aunque los ejemplos anteriores cubren una gran variedad de situaciones y son suficientes para resolver la mayoría de los problemas elementales que se realizarán este curso, no se puede estudiar siguiendo el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores. El caso más general de una trayectoria curva y/o de una fuerza que cambie de forma continua a lo largo de la trayectoria. Así, esta situación más general es la que se muestra en la Figura 6(a), en la que se puede ver cómo el movimiento que realiza la partícula entre los puntos P y Q sigue una trayectoria curva, C, y la fuerza $\vec{F}$, con la que queremos calcular el trabajo que realiza, varía de unos puntos a otros a lo largo de la trayectoria, lo que se nota como $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$. Una forma de obtener un valor aproximado del trabajo que realiza la fuerza es aproximar la trayectoria por segmentos rectos "pequeños" y suponer que el valor de la fuerza en el segmento es constante e igual al valor que toma en el primer punto del segmento. En la Figura 6(b) se dibujan dos de estos segmentos. Así, el trabajo será similar al trabajo calculado a lo largo de la trayectoria quebrada suponiendo fuerzas constantes en los segmentos, de forma que:

$$W \approx \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \cdots = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

Por supuesto, cuanto más pequeños sean los trozos $\Delta\vec{r}$ más se aproximará la suma anterior al valor verdadero del trabajo. Así, en el límite de trozos infinitamente pequeños, la sumatoria se transforma en una integral cuyo valor es igual al valor del trabajo de la fuerza entre los dos puntos a través de la trayectoria indicada. Así, el trabajo en la situación más general se define como:

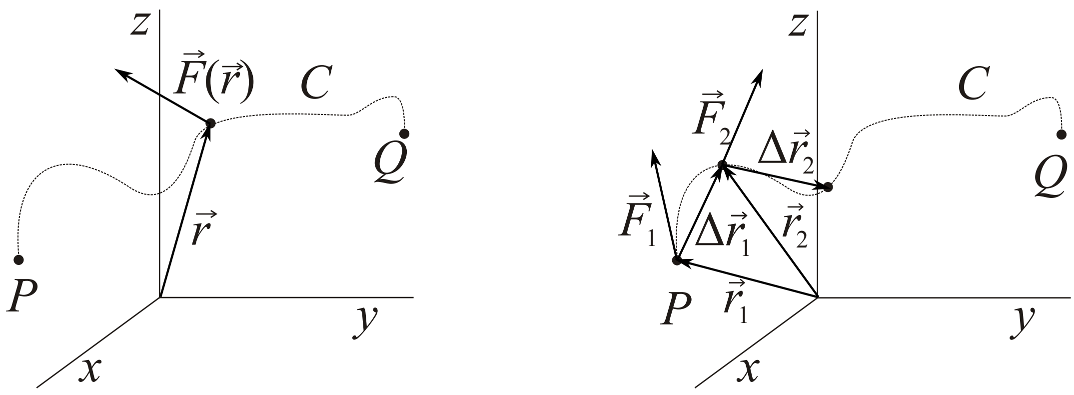

Figura 6: *Trayectoria genérica y fuerza variable entre dos puntos P y Q, (a) esquema genérico; (b) división de la trayectoria en trozos rectos de fuerza constante.*

$$W_{P\to Q} = \int_{\vec{r}_P \; C}^{\vec{r}_Q} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{6}$$

Por tanto, el trabajo es una magnitud **escalar** que depende de los puntos iniciales y finales y de la trayectoria C.

El trabajo se define a través de la ecuación (6), siendo matemáticamente la *circulación* de la fuerza. La circulación es un operador matemático propio del análisis vectorial, donde se estudian conceptos como derivadas e integrales dentro de un espacio de tres dimensiones.

La unidad del trabajo en el S.I. es el *Julio* (J) que equivale a un Newton por metro 1 J = 1 Nm. En el sistema CGS, la unidad se conoce como *ergio*, que equivale a una dina por centímetro, 1 erg = 1 din cm.

Es fácil ver en la ecuación (6) que si la fuerza es perpendicular al desplazamiento en todos los puntos de la trayectoria, el trabajo es nulo. Esto sucede, por ejemplo, si un hombre levanta un cuerpo de 100 kg y, mientras lo sostiene, lo traslada horizontalmente con velocidad constante. Durante el traslado, la única fuerza que genera el hombre es una fuerza vertical hacia arriba que contrarresta al peso. Es fácil ver que si se desplaza horizontalmente, la fuerza que genera el hombre y el desplazamiento son perpendiculares, y por tanto el trabajo es nulo.

Las trayectorias pueden ser cerradas, es decir, parten de un punto y terminan en el mismo punto. En este caso el trabajo realizado a través una trayectoria cerrada C se nota como:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Ejemplo 1: *Trabajo realizado por el peso de un objeto situado cerca de la superficie terrestre cuando describe una trayectoria arbitraria desde $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ hasta $P_f = (x_f, y_f, z_f)$.*

La fuerza peso que se ejerce sobre un cuerpo cerca de la superficie terrestre es constante y cumple $\vec{F} = -mg\hat{k}$, donde m es la masa del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad en esa región y el versor $\hat{k}$ es vertical y dirigido hacia arriba. La trayectoria se supone genérica, por lo que el vector desplazamiento $d\vec{r}$ toma la forma genérica $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$. Si se realiza el producto vectorial $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -mgdz$ y se introduce en la definición de trabajo, queda:

$$W_{i\to f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{P_i}^{P_f} mgdz = -mg \int_{z_i}^{z_f} dz = -mg(z_f - z_i) = -mg\Delta z$$

Por tanto, el trabajo realizado no depende de la trayectorias ni de las coordenadas x e y de los puntos iniciales y finales, sino sólo de la diferencia de alturas entre el punto inicial y el punto final, Δz.

Ejemplo 2: *Calcular el trabajo realizado por la fuerza centrípeta en un movimiento circular.*

En un movimiento circular la trayectoria es un círculo, por lo que la velocidad $\vec{v}$ y el desplazamiento $d\vec{r}$ son dos vectores tangentes a dicho círculo. La fuerza centrípeta, por definición, apunta siempre hacia el centro de curvatura, lo que en este caso coincide con con un radio del círculo. Por tanto, la fuerza centrípeta y el vector desplazamiento son perpendiculares, lo que lleva a:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \ J$$

Ejemplo 3: *Dada la fuerza $\vec{F} = 2xy\hat{\imath} + (x^2 + 2yz^3)\hat{\jmath} + 3y^2z^2\hat{k}$, calcular el trabajo realizado entre los punto $P_1 = (0,0,0)$ y $P_2 = (1,2,3)$ siguiendo las siguientes trayectorias: a) $(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,2,0) \to (1,2,3)$; b) por la recta que pasa directamente por los puntos P_1 y P_2. (Nota: todas las unidades están en S.I.)*

a) El trabajo total W se puede ver como la suma de los trabajos empleados en recorrer cada uno de los trozos: $W_{1\to 2} = W_1 + W_2 + W_3$.
En el trozo 1, $d\vec{r} = dx\hat{\imath}$, por lo que:

$$W_1 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 F_x dx = \int_0^1 2xydx$$

Como en este primer trozo $y = 0$ durante todo el trayecto, hay que sustituir y por 0 en la anterior integral y resulta $W_1 = 0\ J$.
En el trozo 2, $d\vec{r} = dx\hat{\jmath}$, por lo que:

$$W_2 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^2 F_y dy = \int_0^2 (x^2 + 2yz^3)dy$$

Como en este segundo trozo $x = 1$ y $z = 0$ durante todo el trayecto, sustituyendo queda:

$$W_2 = \int_0^2 dy = 2\ J$$

.
En el trozo 3, $d\vec{r} = dx\hat{k}$, por lo que:

$$W_3 = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^3 F_z dz = \int_0^3 3y^2z^2dz$$

Como en este tercer trozo $x = 1$ y $y = 2$ durante todo el trayecto, sustituyendo queda:

$$W_3 = \int_0^3 12z^2dz = \left[4z^3\right]_0^3 = 108\ J$$

.
El trabajo total será

$$W_{1\to 2} = W_1 + W_2 + W_3 = 110\ J$$

b) En este segundo caso, el vector desplazamiento lleva siempre la dirección de la línea que une P_1 con P_2. El vector que une dichos puntos se puede construir fácilmente restando las correspondientes coordenadas. Así, si $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son los vectores de posición de los puntos P_1 y P_2, el vector que une los dos puntos será:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$$

La trayectoria en este caso es una recta de vector director $\vec{r}_{12}$ y que pasa por el origen, por lo que la ecuación de la recta en paramétricas (siendo λ el parámetro) será:

$$x = \lambda;\ y = 2\lambda;\ z = 3\lambda$$

lo que diferenciando queda:

$$dx = d\lambda;\ dy = 2d\lambda;\ dz = 3d\lambda$$

Esta es la condición que cumple cada una de las coordenadas del vector desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ es su movimiento de P_1 a P_2, por lo que el vector desplazamiento queda:

$$d\vec{r} = d\lambda\hat{\imath} + 2d\lambda\hat{\jmath} + 3d\lambda\hat{k}$$

Con esto se puede calcular ya el trabajo total W como sigue:

$$W_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} (F_x d\lambda + 2F_y d\lambda + 3F_z d\lambda) =$$
$$\int_0^1 \left(4\lambda^2 d\lambda + 2(\lambda^2 + 108\lambda^4)d\lambda + 324\lambda^4 d\lambda\right) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{216}{5} + \frac{324}{5} = 2 + 108 = 110\ J$$

5.2. Potencia

La potencia es una magnitud que relaciona el trabajo realizado por una fuerza y el tiempo empleado en realizar dicho trabajo. En principio si una fuerza realiza un determinado trabajo al llevar una partícula de una posición a otra, no hay nada en esta información que permita indicar si la fuerza ha tardado más o menos tiempo en realizar dicho trabajo y por tanto en recorrer el trayecto. Por lo tanto se pueden tener situaciones en las que el trabajo realizado por fuerzas muy distintas sea el mismo.

La potencia que realiza una fuerza se define, por tanto, como la variación del trabajo realizado por una fuerza con respecto al tiempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

Es por tanto una magnitud escalar, y su unidad en el S.I. es el *Watio* (W), de forma que 1 W = 1J/s, y en el CGS la unidad será ergio por segundo (erg/s).

Es fácil encontrar otra expresión para la potencia sin más que sustituir la expresión del trabajo diferencial $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ en la definición:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

es decir, la potencia que realiza una fuerza es el producto escalar de dicha fuerza por la velocidad.

5.3. Energía

La energía es una magnitud física que mide la capacidad que un sistema o un cuerpo tiene para producir trabajo. Se podría decir que es como un "almacén de trabajo". Es también una magnitud escalar y se mide en las mismas unidades que el trabajo.

Los dos tipos de energía que aparecen en mecánica son:

- Energía cinética: la capacidad que tiene un cuerpo de producir trabajo debido a la velocidad que lleva el cuerpo.
- Energía potencial: la capacidad que tiene un cuerpo de producir trabajo debido a la posición o configuración que tiene el cuerpo, respecto de un campo de fuerzas externo.

En los siguientes apartados se tratarán con más detenimiento estos dos tipos de energía.

5.4. Teorema de conservación de la energía cinética

Este teorema también se conoce clásicamente con el nombre de *Teorema de las Fuerzas Vivas*. Como sabemos según la segunda ley de Newton, el movimiento de una partícula se puede obtener sabiendo cuál es la resultante de las fuerzas que actúan sobre esta partícula. Si a esta resultante de las fuerzas la llamamos $\vec{F}$ podemos preguntarnos cuál será el trabajo realizado por ella. Así, el trabajo que realiza dicha fuerza resultante para ir del punto A al punto B resulta:

$$W_{A\to B} = \int_{A\ C}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \tag{7}$$

Si se define la energía cinética de una partícula como $E_c = \frac{1}{2}mv^2$, el resultado anterior implica que el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas es igual a la variación de energía cinética:

$$W = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

Demostración: *Como $\vec{F}$ es la resultante de las fuerzas cumple la segunda ley de Newton, es decir, $\vec{F} = m\vec{a}$. Si esto se sustituye en la definición de trabajo y se opera, se tiene:*

$$W_{A\to B} = \int_A^B m\vec{a}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\int_A^B d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\int_A^B d\vec{v}\cdot\vec{v}$$

Para hacer esta integral sólo hay que diferenciar la igualdad $\vec{v}\cdot\vec{v} = v^2$, como sigue:

$$d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = d\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 2\vec{v}\cdot d\vec{v} = d(v^2)$$

por tanto $\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}d(v^2)$. Si esto se sustituye en la expresión del trabajo:

$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}m\int_A^B d(v^2) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

■

Es importante notar que el resultado (7) sólo es válido para la **resultante de las fuerzas**. Si, por ejemplo, sobre un cuerpo se ejercen dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, los trabajos W_1 y W_2 realizados por estas dos fuerzas en el desplazamiento de un cuerpo en general no serán igual a la variación de energía cinética ($W_1 \neq \Delta E_c$ y $W_2 \neq \Delta E_c$).

Por último, una duda que se nos podría presentar es que tanto W como E_c dependen del sistema de referencia inercial que se tome (a través de la velocidad y la posición respectivamente). Sin embargo, es fácil comprobar que el teorema de conservación de la energía cinética se cumple para cualquiera de estos sistemas inerciales (compruébese).

6. Fuerzas conservativas. Energía potencial

Como se ha visto, en general el trabajo que una fuerza realiza para ir de un punto A al punto B, $W_{A\to B}$, es una función de camino, es decir, depende de la trayectoria recorrida para ir de A a B. Sin embargo, existen ciertas fuerzas para las que el trabajo no depende del camino. Matemáticamente esto se escribe como:

$$W_{A\to B} = \int_{A\ C_1}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A\ C_2}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{8}$$

para dos caminos cualquiera C_1 y C_2 distintos.

Las fuerzas que cumplen esto se llaman *fuerzas conservativas* y sólo para ellas se puede definir una *energía potencial*. Como hemos dicho, el trabajo que realiza una fuerza conservativa entre dos punto A y B no depende del camino recorrido, sino únicamente del punto inicial A y del punto final B. Para que esto suceda es necesario que exista una propiedad escalar, que se llamará energía potencial E_p, de forma que el trabajo de la fuerza conservativa se puede expresar como:

$$W_{A\to B} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p \tag{9}$$

donde el signo menos tiene una explicación histórica. Por tanto, **para toda fuerza conservativa se puede definir una energía potencial y el trabajo de esta fuerza es igual a menos la variación de la energía potencial.**

La forma explícita de esta energía potencial dependerá de la forma explícita de la fuerza conservativa, y es relativamente fácil de calcular.

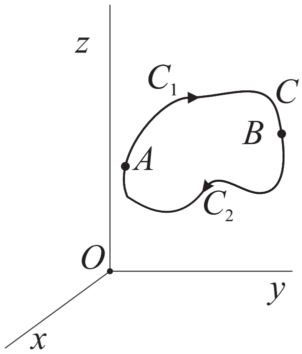

Figura 7: *Trayectoria cerrada.*

Una consecuencia de esta definición es lo que sucede con el trabajo sobre un camino cerrado. Se puede demostrar que este trabajo resulta:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{10}$$

Es decir, **el trabajo a través de cualquier trayectoria cerrada de una fuerza conservativa es nulo**. Esto ya se enunció en el tema anterior para cualquier campo vectorial conservativo, pero no se demostró.

Demostración: *En cualquier trayectoria cerrada como la que se muestra en la Figura 7, se pueden definir dos puntos A y B, de forma que sobre la trayectoria total se definen dos trayectorias parciales, C_1 que va de A a B siguiendo C, y C_2 que va de B a A siguiendo C. Entonces, el trabajo a través de la trayectoria cerrada C se puede escribir como:*

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\ C_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{B\ C_2}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{11}$$

Igual que se puede ir de B a A a través de C_2, también se puede ir de A a B a través del mismo camino, sin más que invertir cada uno de los pasos infinitesimales que componen la circulación, lo que supone cambiar $d\vec{r}$ en cada paso por $-d\vec{r}$. Por lo tanto se cumple:

$$\int_{B\ C_2}^{A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{A\ C_2}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si este resultado se sustituye en (11), el trabajo a través de una trayectoria cerrada queda:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A\ C_1}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{A\ C_2}^{B} \vec{F}$$

Pero si la fuerza es conservativa, según (8) el trabajo entre dos puntos no depende del camino, por lo que se llega a la expresión (10). ■

La demostración rigurosa de que el trabajo de una fuerza conservativa es igual a menos la variación de una función escalar queda fuera de los objetivos de este curso, y requiere de conocimientos de análisis vectorial.

A partir de (9), la relación entre una fuerza conservativa y su energía potencial es:

$$-\Delta E_p = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{12}$$

Cabe preguntar si se puede despejar la fuerza de la anterior ecuación. Esto es posible y el resultado es:

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k} \tag{13}$$

La demostración rigurosa de esta igualdad vuelve a requerir conocimientos de análisis vectorial que están fuera de los objetivos de este curso, por lo que se deducirá en el caso de una dimensión y luego, simplemente se enunciará en su forma general.

Demostración: *Si se trabaja en una dimensión, la ecuación (12) queda:*

$$\int_A^B F dx = -(E_{p_B} - E_{p_A})$$

Es decir, $-E_p$ es la primitiva de F, por lo que según el teorema fundamental del cálculo:

$$F = -\frac{dE_p}{dx}$$

Lo que significa que la fuerza conservativa es igual a menos la derivada de la energía potencial con respecto a x, es decir, la fuerza se obtiene sabiendo cómo varía la energía potencial al variar x.

El resultado anterior se ha obtenido en una dimensión y habrá que extenderlo a tres dimensiones. El problema es que la energía potencial estará definida en cualquier punto del espacio y en principio variará cuando nos movamos en cualquier dirección. Así, si la E_p varía en la dirección del eje x provocará que la fuerza tenga una componente en esa dirección, de forma que:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

La derivada es parcial porque la energía potencial dependerá de las tres coordenadas. De igual forma, variaciones de la energía potencial en las direcciones y y z provocarán componentes de la fuerzas conservativas en esas direcciones, por lo que se tiene:

$$F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad y \; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

Se tienen ya las tres componentes de la fuerza conservativa, de forma que se obtiene (13).■

La ecuación (13) suele aparecer en los libros de forma más compacta utilizando un operador vectorial que se denomina *operador gradiente* u *operador nabla* y se nota como $\vec{\nabla}$. Este operador aplicado a cualquier función escalar f es:

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

de forma que la ecuación (13) queda:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$$

Finalmente, **una fuerza conservativa es igual a menos el gradiente de su energía potencial**.

Ejemplo 1: *Estudiar si la fuerza gravitatoria cerca de la superficie terrestre es conservativa y calcular su energía potencial.*

En el primer ejemplo de la Sección 5.1 se calculó el trabajo realizado por el peso para ir de un punto A a otro B, y el resultado fue:

$$W_{A\to B} = -mg(h_B - h_A)$$

donde m es la masa del cuerpo, g la gravedad y h_A y h_B la altura de los puntos A y B, respectivamente. Por tanto, es fácil ver que la fuerza es conservativa (el trabajo no depende el camino) y que la energía potencial, en este caso llamada energía potencial gravitatoria *es $E_p = mgh$.*

Ejemplo 2: *Estudiar si las fuerzas centrales son conservativas.*

Una fuerza central es aquella que se puede expresar como:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r}$$

Donde $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto tomando como origen de coordenadas el punto donde se origina la fuerza (llamado centro de fuerzas), r es el módulo de este vector de posición y $\hat{r}$ es una versor en la dirección y sentido de $\vec{r}$, por lo que $\vec{r} = r\hat{r}$.

Por tanto, una fuerza central lleva la dirección de la línea que une el punto donde se considera la fuerza y el origen de coordenadas y cuyo módulo sólo depende de la distancia a ese centro. Sin entrar en detalles, se puede demostrar que en este caso el producto escalar de $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ queda $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)dr$. Con esto, el trabajo entre dos puntos A y B queda:

$$W_{A\to B} = \int_A^B F(r)dr$$

Esta expresión es una integral escalar en una dimensión, por lo que no depende del camino, lo que indica que ***las fuerzas centrales son conservativas****.*

Ejemplo 3: *Estudiar si la fuerza gravitatoria lejos de la superficie terrestre es conservativa y calcular su energía potencial.*

La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un cuerpo de masa m es:

$$\vec{F}_g = -G\frac{M_T m}{r^2}\hat{r}$$

donde el origen del sistemas de coordenadas está en el centro de la tierra, G es la constante de gravitación universal, M_T es la masa de la tierra y $\vec{r}$ es el vector de posición del cuerpo con respecto al centro de la Tierra. Como puede verse, esta expresión corresponde a una fuerza central, por lo que es una fuerza conservativa según lo visto en el ejemplo anterior (otro ejemplo clásico de fuerza de este tipo sería la fuerza electrostática, que se estudiará más adelante en el curso). Para calcular la energía potencial hay que calcular el trabajo entre dos puntos A y B:

$$W_{A\to B} = \int_A^B -G\frac{M_T m}{r^2}dr = \left(G\frac{M_T m}{r_B} - G\frac{M_T m}{r_A}dr\right)$$

por lo que la energía potencial sería $E_p = -G\frac{M_T m}{r}$ (¡cuidado con el signo!).

Ejemplo 4: *Estudiar si la fuerza elástica de un muelle es conservativa y calcular su energía potencial.*

En una dimensión hemos visto que la fuerza de un muelle es $F = -kx$, suponiendo que cuando el cuerpo está en el origen el muelle está relajado. En este caso el trabajo para ir de un punto a otro será:

$$W_{A\to B} = \int_A^B F dx = -\int_A^B kx dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

por lo que no depende del camino. La fuerza elástica será una fuerza conservativa y la energía potencial será $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. En el caso más general donde el origen no esté en el punto de reposo del muelle, la fuerza queda $F = -k\Delta x$ donde Δx es lo que se ha estirado o contraído el muelle (elongación), y la energía potencial quedaría $E_p = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$.

Para terminar esta sección, sólo hay que indicar que existe hay una arbitrariedad a la hora de elegir la energía potencial, ya que añadiendo cualquier constante a la expresión se sigue cumpliendo que el trabajo de la fuerza conservativa es igual a menos la variación de la energía potencial. Por ejemplo, para el caso del peso (cerca de la superficie terrestre), la energía potencial es $E_p = mgh$, pero también se podría definir como $E_p{}' = mgh + 27$, ya que $\Delta E_p = \Delta E_p{}'$. Se dice que el origen o referencia de la energía potencial (el lugar donde se hace cero) es arbitrario.

7. Conservación de la energía mecánica

Por un lado hemos visto en la Sección 5.4 que el trabajo de la fuerza resultante era igual a la variación de la energía cinética, es decir $W_{A\to B} = \Delta E_c$. Por otro parte, si todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo son conservativas se puede definir una energía potencial para cada una de ellas, y se cumple para el trabajo de la resultante de las fuerzas que:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i \left(-\Delta E_{p_i}\right)$$

Si se define la energía potencial total E_p como la suma de las energía potenciales, $E_p = \sum_i E_{p_i}$, se tiene que para la resultante de las fuerzas, si todas son conservativas, el trabajo es:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p$$

Si se igualan las dos expresiones para el trabajo de la resultante de las fuerzas se tiene:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \;\Rightarrow\; E_{cB} - E_{cA} = E_{pA} - E_{pB} \;\Rightarrow\; E_{cB} + E_{pB} = E_{cA} + E_{pA}$$

Por lo tanto, si se define la *energía mecánica* de un cuerpo como la suma de la energía cinética más la potencial, $E_m = E_c + E_p$, entonces se tiene que la energía mecánica cumple, para cualesquiera dos puntos A y B que:

$$E_{mB} = E_{mA}$$

Lo que se conoce como *Principio de Conservación de la Energía Mecánica* y sólo se cumple si **todas** las fuerzas que actúan son conservativas.

7.1. Sistema no conservativos

Si alguna de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo no es conservativa, el trabajo de la resultante de las fuerzas **no** es igual a menos la variación de la energía potencial. En este caso, las fuerzas se pueden separar en conservativas $\vec{F}_i^C$ y no conservativas $\vec{F}_i^{NC}$, y para las primeras, su trabajo **sí** es igual a menos la variación de la energía potencial, de manera que:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i^C \cdot d\vec{r} + \int_A^B \sum_i \vec{F}_i^{NC} \cdot d\vec{r} = -\sum_i \Delta E_{p_i} + \int_A^B \sum_i \vec{F}_i^{NC} \cdot d\vec{r}$$

Si al igual que antes, la energía potencial total es la suma de las energías potenciales, $E_p = \sum_i E_{p_i}$, y el trabajo de las fuerzas no conservativas se nota como W^{NC}, se tiene:

$$W_{A\to B} = -\Delta E_p + W^{NC}$$

Por otro lado, el trabajo de la resultantes de las fuerzas **siempre** es igual a la variación de la energía cinética, con lo que:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W^{NC} \;\Rightarrow\; E_{cB} - E_{cA} = E_{pA} - E_{pB} + W^{NC} \;\Rightarrow\; E_{cB} + E_{pB} = E_{cA} + E_{pA} + W^{NC}$$

Esto significa que la energía mecánica no se conserva, sino que cumple:

$$E_{mB} = E_{mA} + W^{NC}$$

El ejemplo más típico de esta situación es cuando existe una fuerza de rozamiento $\vec{F}_r$. Como la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento relativo, su trabajo siempre será negativo (para cada paso infinitesimal se tiene $\vec{F}_R \cdot d\vec{r} < 0$), por lo que al pasar de un punto inicial A a un punto final B, la energía del punto final siempre será menor que la del punto inicial (se "pierde" o disipa energía).

8. Colisiones

En la Sección 3.5 se demostró que si no existen fuerzas exteriores, el momento lineal total (la suma) de dos partículas permanece constante. Este apartado se demuestra que en el caso de *colisiones*, el momento lineal total del sistema permanece constante aunque haya fuerzas externas, con tal de que estas no sean *impulsivas*.

Por *colisión* o *choque* se entenderá una interacción que dura muy poco tiempo, de forma que se puede considerar instantánea.

En la Sección 3.4 se estudió que la derivada del momento lineal de una partícula cumple

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

donde $\vec{F}$ es la resultante de la fuerza. Si tenemos dos partículas, sobre la primera partícula puede existir una fuerza ejercida por el cuerpo 2, $\vec{F}_{21}$, y una fuerza exterior $\vec{F}_1^{\text{ext}}$, de forma que el momento lineal de la partícula 1 cumple:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{\text{ext}}$$

De igual forma, sobre el cuerpo 2 puede existir una fuerza ejercida por el cuerpo 1, $\vec{F}_{12}$, y una fuerza exterior $\vec{F}_2^{\text{ext}}$, de forma que:

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$$

Si se suman las dos últimas ecuaciones se tiene

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$$

Por la tercera ley de Newton $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ y si se nota el momento total como $\vec{p}_T = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ y la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre las dos partículas como $\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}}$, la anterior ecuación queda:

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$$

Por lo tanto, si Δt es el tiempo que dura una interacción, la variación de momento lineal total que se produzca durante ese tiempo cumplirá:

$$\Delta\vec{p}_T \approx \vec{F}^{\text{ext}}\Delta t$$

Si la interacción dura muy poco, Δt será muy pequeña, y si la hacemos tender a cero, $\Delta\vec{p}_T$ tenderá a cero también. Por lo que en el caso en el que la interacción sea instantánea se tendrá:

$$\Delta\vec{p}_T = 0 \tag{14}$$

En los choques se conserva el momento lineal total. El resultado anterior se ha obtenido para dos partículas pero es muy fácil de extender para cualquier número de partículas.

Existe una excepción a la anterior deducción y es el caso en el que se tengan fuerzas exteriores $\vec{F}^{\text{ext}}$ que tomen valores muy altos durante el pequeño tiempo que dura la interacción. En este caso, al hacer el intervalo Δt que dura la interacción tender a cero, no tiene por qué resultar una $\Delta\vec{p}_T$ nula, ya que el producto de algo muy pequeño (el tiempo) por algo muy grande (la fuerza) no tiene por qué dar algo muy pequeño. Este tipo de fuerzas se denominan *impulsivas* y son fuerzas que toman valores muy altos durante intervalos de tiempo pequeños. Ejemplos de este tipos de fuerzas hay muchos, por ejemplo, la fuerza que un palo de golf realiza sobre la pelota, la fuerza entre dos bolas de billar, etc. Es importante notar que puede haber (y casi siempre habrá) fuerzas impulsivas **dentro** del sistema de partículas, pero no puede haber fuerzas **externas** impulsivas, si se quiere que se cumpla la ecuación (14).

Para terminar con el tema, indicar que los choques pueden ser *elásticos* o *inelásticos*. Los choques elásticos son aquéllos en los que se conserva la energía mecánica (la energía antes del choque es igual a la energía después del choque), mientras que los choques inelásticos son aquellos choques donde **no** se conserva la energía (generalmente se pierde energía en el choque). Dentro de los choques inelásticos, están los choques denominados *plásticos* o *perfectamente inelásticos* que son aquellos choques inelásticos con la mayor pérdida de energía posible, lo que implica que los cuerpos que chocan permanecen unidos después del choque.