Tema 2. Oscilaciones.

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción

Los fenómenos físicos que se repiten en el tiempo fueron en su día el origen principal de las ciencias naturales y en especial de la física. La sucesión de las estaciones, del día y la noche, de generaciones de animales, etc., produjo las primeras búsquedas de algún tipo de principio fundamental que produjera esas regularidades.

Estos fenómenos que se repiten en el tiempo se conocen como fenómenos *periódicos* y se caracterizan fundamentalmente por el *periodo*, que es el tiempo que transcurre entre dos repeticiones consecutivas.

Ejemplos de este tipo de movimiento serían la sucesión de días y noches, con un periodo de 24 horas; la de las estaciones, con un periodo de un año; el movimiento de un muelle del que se cuelga una masa, con un periodo que dependerá de la masa y de las propiedades del muelle; las vibraciones de los iones en una red cristalina, con un periodo que dependerá de las propiedades del ion y de la red; el voltaje de la corriente eléctrica en una vivienda, con un periodo de 0.02 segundos; etc.

Este tema corresponde a mecánica, por lo que los fenómenos que se van a estudiar serán movimientos que se llamarán *movimientos periódicos*, sin embargo las conclusiones que se obtengan serán fácilmente extrapolables a otros tipos de fenómenos periódicos, sean de carácter térmico, eléctrico, ondulatorio, electromagnético, financiero o de cualquier otro tipo.

Cuando en un movimiento periódico se recorre una misma trayectoria en un sentido y en otro en torno a una posición media, que suele ser de equilibrio, se dice que el movimiento es *oscilatorio*. Los dos ejemplos más típicos de este tipo de movimiento son el movimiento de un péndulo y el de un muelle.

En este tema se van a estudiar los movimientos oscilatorios dentro de los movimientos periódicos, comenzando con el movimiento oscilatorio más sencillo de todos: el *movimiento armónico simple* o m.a.s. La cinemática de este movimiento se estudiará en la Sección 2, la dinámica en la Sección 3 y la energía en la Sección 4. La Sección 5 trata sobre los movimientos oscilatorios donde existe pérdida de energía. El tema concluye con el estudio de los movimientos oscilatorios con pérdidas y forzados por alguna causa externa.

2. Cinemática

Decimos que una partícula que se mueve a lo largo de un eje x sigue un m.a.s. en torno al origen cuando la posición x de esta partícula en función del tiempo cumple la expresión:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{1}$$

donde A es la *amplitud* del movimiento, y representa la mayor distancia a la que la partícula se encuentra del origen durante el movimiento; ω es la frecuencia angular y lleva información del ritmo con el que repiten las oscilaciones; y φ_0 es la fase inicial, que corresponde al argumento de la función seno en el instante $t = 0$. En la Figura 1 se representa la expresión (1), donde se indica también el periodo.

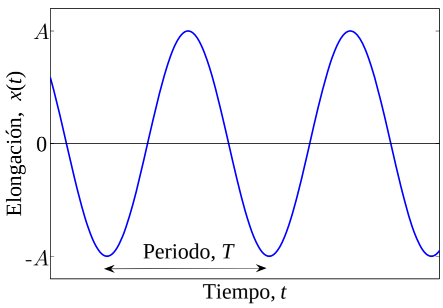

Figura 1: *Posición de una partícula moviéndose según un m.a.s. en función del tiempo*

La posición x en (1) se suele denominar también *elongación* y la cantidad dentro del seno en la expresión (1) (es decir $\omega t + \varphi_0$) se conoce como *fase*, y se mide en radianes.

De la expresión (1) es fácil obtener el periodo del movimiento, ya que la función seno es una función que se repite cada vez que su argumento aumenta una cantidad igual a 2π. Por tanto, cuando aumenta el tiempo un periodo T, la fase tiene que aumentar una cantidad 2π. Esto implica que:

$$\omega(t+T)+\varphi_0 = \omega t+\varphi_0+2\pi$$

simplificando se obtiene:

$$\omega T = 2\pi$$

de lo que se obtiene que el periodo resulta ser:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

Por otro lado, en todos los movimientos periódicos se puede definir una *frecuencia* como el número de veces que el movimiento se repite en la unidad de tiempo. Por tanto, en movimientos oscilatorios, la frecuencia se define como el número de oscilaciones que se repiten en la unidad de tiempo (normalmente el segundo, pero puede también ser un día, un año o cualquier otra medida de tiempo). A través de esta definición es fácil relacionar la frecuencia y el periodo, ya que si durante el tiempo que dura un periodo se realiza una oscilación, durante una unidad de tiempo se realizará un número de oscilaciones que será:

$$f=\frac{1}{T}$$

A partir de este resultado también es fácil relacionar la frecuencia y la frecuencia angular como:

$$\omega = 2\pi f$$

La frecuencia se mide en oscilaciones por unidad de tipo, es decir, oscilaciones por año, oscilaciones por día, etc. En el SI, la unidad de tiempo es el segundo, por lo que la frecuencia se mide en oscilaciones por segundo, unidad que se conoce con el nombre de *Hercio* (Hz) y tiene dimensiones de tiempo^{-1}.

Por supuesto, el m.a.s. se podría haber expresado utilizando la función coseno en vez de la función seno en (1). Para ello no hay más que tener en cuenta la relación que existe entre estas dos funciones:

$$\operatorname{sen}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha$$

con esto el m.a.s. se podría expresar como:

$$x = A\cos(\omega t+\phi_0) = A\operatorname{sen}\left(\omega t+\phi_0+\frac{\pi}{2}\right)$$

y comparando con la ecuación (1) se tendría la relación entra las dos fases iniciales:

$$\varphi_0=\phi_0+\frac{\pi}{2}$$

2.1. Velocidad

La velocidad de un m.a.s. se obtiene derivando la posición (1) con respecto al tiempo:

$$v=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0)=A\omega\operatorname{sen}(\omega t+\varphi_0+\frac{\pi}{2}) \qquad (2)$$

por lo que la velocidad también oscila con la misma frecuencia que la posición, con una amplitud $A\omega$ y adelantada $\frac{\pi}{2}$ con respecto a esta. La velocidad se representa gráficamente en la Figura 2 donde aparece junto a la posición para una $\omega < 1$ rad/s (¿dónde se refleja este hecho?). Puede apreciarse cómo, mirando desde la izquierda, la velocidad está en efecto adelanta $\frac{\pi}{2}$ respecto de la posición.

Sabiendo la posición y la velocidad iniciales, x_0 y v_0, se pueden obtener la amplitud y la fase inicial:

$$\begin{array}{l} x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \\ v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \end{array} \xrightarrow{t=0} \begin{array}{l} x_0 = A\,\mathrm{sen}\,\varphi_0 \\ v_0 = A\omega\cos\varphi_0 \end{array}$$

Si la posición inicial se multiplica por ω y se divide por la velocidad inicial se obtiene:

$$\frac{\omega x_0}{v_0} = \tan(\varphi_0) \ ,$$

Y si se divide la velocidad inicial por ω, se eleva al cuadrado y se suma con la posición inicial al cuadrado se tiene:

$$x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 = A^2\,\mathrm{sen}^2(\varphi_0) + A^2\cos^2(\varphi_0) = A^2\left(\mathrm{sen}^2(\varphi_0) + \cos^2(\varphi_0)\right) = A^2$$

Con estas dos expresiones se puede obtener la amplitud y la fase inicial en función de la posición y la velocidad iniciales:

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right) \quad \text{y} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

Por tanto, la amplitud y la fase inicial son magnitudes que dependen de las condiciones iniciales, mientras que la frecuencia angular no depende de estas condiciones, ya que es una propiedad del oscilador. Esta independencia entre la amplitud y la frecuencia es una característica muy importante del m.a.s. y se conoce como *isocronismo* del m.a.s., que significa que el movimiento oscilará con la misma frecuencia sea cual sea su amplitud.

2.2. Aceleración

La aceleración de un m.a.s. se obtiene derivando la velocidad (2) con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{3}$$

Por lo tanto la aceleración también oscila con la misma frecuencia que la posición, con una amplitud $A\omega^2$ y con una diferencia de fase de π con respecto a aquella. Esto último significa que cuando la posición es máxima, la aceleración será mínima y viceversa. Se dice que la aceleración y la posición están *en oposición de fase*. En la Figura 2 se representa gráficamente la aceleración, junto a la posición y la velocidad, y se puede observar cómo, efectivamente, la aceleración y la posición se anulan en los mismos instantes, pero cuando una es máxima la otra es mínima.

A través de las ecuaciones (1) y (3) es fácil expresar la aceleración en función de la posición, obteniéndose:

$$a = -\omega^2 x \tag{4}$$

Si se utiliza la definición de aceleración, esta última ecuación queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \tag{5}$$

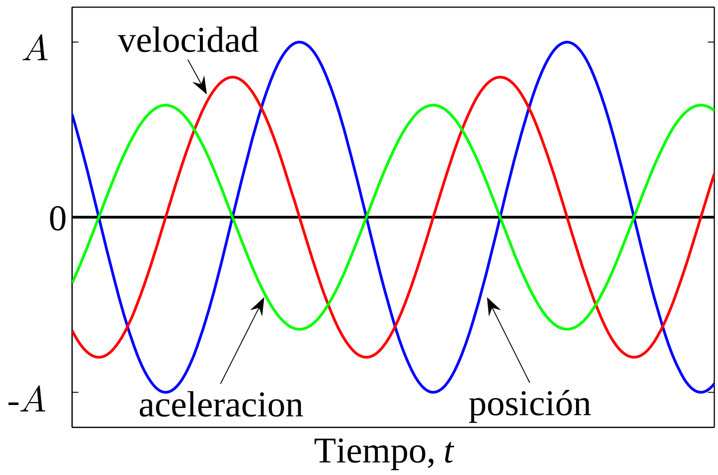

Figura 2: *Posición, velocidad y aceleración en función del tiempo de una partícula moviéndose según un m.a.s.*

3. Dinámica

Vamos a estudiar en este apartado cómo son las fuerzas que producen el m.a.s. Esto es fácil de obtener aplicando la segunda ley de Newton en la dirección en la que se mueve el cuerpo, y haciendo uso de la ecuación (4):

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx \tag{6}$$

Es decir, la fuerza debe ser igual a menos una constante **positiva** por la coordenada x. Esta constante positiva k se conoce como constante de fuerza o constante elástica y se estudió en el Tema 1 para el caso de muelles. De la expresión (6) es fácil ver que la constante de la fuerza y la frecuencia angular se relacionan según:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La expresión (6) indica que la fuerza es nula en $x = 0$, es proporcional al desplazamiento respecto del origen y se opone a dicho desplazamiento. El ejemplo más típico de este tipo de fuerzas es, como ya se ha apuntado anteriormente, la fuerza de un muelle que se estudió en el Tema 1. Sin embargo, es importante destacar que no tiene que haber siempre muelles para que se produzcan oscilaciones.

Hasta ahora hemos visto que cuando una partícula se mueve siguiendo un m.a.s., la aceleración cumple (4) y por tanto la fuerza cumple (6). Cabría preguntarse si también es cierto que siempre que sobre una partícula actúe una resultante de las fuerzas que siga la expresión (6), la partícula se mueve siguiendo un m.a.s. Esta pregunta se podría responder directamente a través de la relación que hay entre la fuerza y la posición, que implica una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes, y de la teoría matemática de ecuaciones diferenciales. La respuesta se estudiará en este segundo cuatrimestre en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Numérico*. Por lo tanto, siempre que aparezca una fuerza del tipo $F = -kx$ se tendrá una aceleración del tipo $a = -\omega^2 x$, que corresponde a una ecuación diferencial como (5). La solución de esta ecuación resulta en un movimiento como (1) donde A y φ_0 dependen de las condiciones iniciales y ω es la raíz cuadrada de la constante positiva que aparece en la ecuación (5).

Demostración: *Para una fuerza del tipo $F = -kx$ se aplica la segunda ley de Newton:*

$$F = ma \implies -kx = m\frac{dv}{dt}$$

Como se tiene dos variables dependientes y una independiente, no se puede integrar y habría que eliminar alguna. Para esto, se multiplica y se divide el segundo término por la velocidad, se opera y se simplifica:

$$-kx = m\frac{dv}{dt}\frac{v}{v} = m\frac{dv}{dt}\frac{v}{\frac{dx}{dt}} = mdv\frac{v}{dx}$$

Ahora sólo hay dos variables (x y v) las cuales se pueden situar en miembros distintos e integrar:

$$-\frac{k}{m}xdx = vdv \implies -\int_{x_0}^{x}\frac{k}{m}xdx = \int_{v_0}^{v}vdv \implies -\frac{k}{m}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x_0^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}-\frac{v_0^2}{2}$$

Con lo que se puede despejar la velocidad en función de la posición:

$$v = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2 - \frac{k}{m}x^2}$$

Ahora, la velocidad se puede expresar como la derivada de la posición con respecto al tiempo

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2 - x^2}$$

donde vuelven a aparecer sólo dos variables (x y t), lo que permite despejar cada una de ellas e integrar:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt \implies \int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2 - x^2}} = \int_0^t \frac{k}{m}dt$$

La integral de la izquierda es una integral del tipo:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = \int\frac{dx}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{c}\right)^2}} = \left|\begin{array}{c} u = \frac{x}{c} \\ du = \frac{dx}{c} \end{array}\right| = \int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \text{arcsen}(u) = \text{arcsen}\left(\frac{x}{c}\right)$$

Este resultado se puede utilizar para resolver la integral del miembro de la izquierda en la ecuación que relaciona x y t, obteniéndose:

$$\text{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2}}\right) - \text{arcsen}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2}}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

Como hemos visto, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ y $A = \sqrt{\frac{v_0^2}{k/m} + x_0^2}$, si decimos que se cumple $\varphi_0 = \text{arcsen}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m}+x_0^2}}\right)$, la anterior ecuación queda:

$$\text{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right) - \varphi_0 = \omega t \implies \text{arcsen}\left(\frac{x}{A}\right) = \omega t + \varphi_0 \implies x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_0)$$

con lo que se obtiene la ecuación de un m.a.s. Sólo falta por demostrar que $\varphi_0 = \text{arcsen}\left(\frac{x_0}{\sqrt{\frac{v_0^2}{k/m}+x_0^2}}\right)$.
Según se vio en la Sección 2.1, se cumple que $\tan(\varphi_0) = \frac{\omega x_0}{v_0}$*, por lo que no hay más que utilizar la relación que existe entre el seno y la tangente que es:*

$$\text{sen}(\varphi_0) = \sqrt{\frac{\tan^2(\varphi_0)}{1+\tan^2(\varphi_0)}} = \sqrt{\frac{\frac{\omega^2 x_0^2}{v_0^2}}{1+\frac{\omega^2 x_0^2}{v_0^2}}} = \sqrt{\frac{\omega^2 x_0^2}{v_0+\omega^2 x_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega}}}$$

y se obtiene la expresión de φ_0 *utilizada en la ecuación del movimiento.* ■

4. Energía cinética y potencial

Ya se estudió en el Tema 1 que una fuerza del tipo elástico $F = -kx$ es una fuerza conservativa, y su energía potencial correspondía con la energía potencial elástica:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Cuando sobre una partícula sólo actúa una fuerza elástica, al ser ésta conservativa, la energía mecánica se conservará. Como ya sabemos, esta energía mecánica es la suma de la energía cinética y la potencial, que en el caso de un m.a.s. queda:

$$E_m = E_p + E_c = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Si se utiliza que $k = m\omega^2$ y se sustituyen las expresiones de x y v dadas en (1) y (2) se obtiene:

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \,\text{sen}^2(\omega t+\varphi_0) + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\left(\text{sen}^2(\omega t+\varphi_0)+\cos^2(\omega t+\varphi_0)\right)$$

El resultado es una energía mecánica constante, como era de esperar, y de valor:

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$$

A partir de la energía mecánica se puede relacionar la velocidad y la posición:

$$E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \implies v = \sqrt{\frac{2E_m - kx^2}{m}}$$

Con lo que la relación entre la velocidad y la posición queda:

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

En la Figura 3 se presenta a modo de resumen cómo varían las energías en un m.a.s. en función de la posición.

5. Oscilaciones amortiguadas

Hasta ahora se han estudiado oscilaciones en las que sólo actúa una fuerza elástica, donde la energía mecánica permanece constante. Son por tanto oscilaciones que mantienen indefinidamente en el tiempo. De nuestra experiencia diaria sabemos que muchas de las oscilaciones con las que

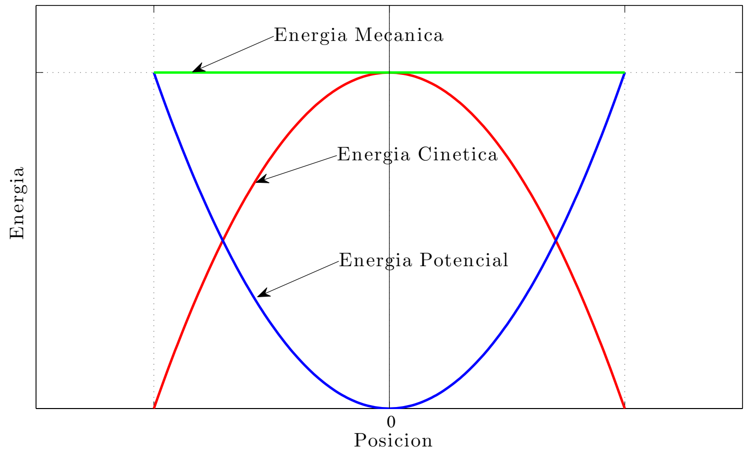

Figura 3: *Energía cinética, potencial y mecánica en función de la posición para un m.a.s.*

nos encontramos no son de esta clase, sino que van perdiendo energía paulatinamente hasta que desaparece toda oscilación. Esto es debido a la existencia de un amortiguamiento ocasionado por fuerzas de rozamiento. A este tipo de oscilaciones se les denomina *oscilaciones amortiguadas*.

Las fuerzas de rozamiento más comunes que suelen aparecer en las oscilaciones son fuerzas de rozamiento que dependen de la velocidad, como eran las fuerzas de rozamiento en fluidos estudiadas en el Tema 1. Estas fuerzas se oponen al movimiento y su expresión es $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$, donde γ se conoce como *constante o coeficiente de amortiguamiento*. Por tanto, la fuerza lleva la misma dirección que la velocidad, sentido contrario y módulo proporcional al módulo de la velocidad.

Para una partícula moviéndose en una dimensión bajo la acción de una fuerza elástica, y sufriendo un fuerza de rozamiento como la indicada antes, la segunda ley de Newton se escribiría:

$$F_e + F_r = -kx - \gamma v = ma$$

Si se pasa todo a un miembro y se divide por m se tiene:

$$a + \frac{\gamma}{m}v + \frac{k}{m}x = 0$$

Se nota ahora la frecuencia angular del oscilador sin amortiguar como ω_0, por lo que $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, y se define el *factor de amortiguamiento* β como $\beta = \frac{\gamma}{2m}$. Con estas definiciones y las de a y v se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{7}$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden (la mayor derivada es de orden dos), con coeficientes constantes (todo lo que multiplica x y sus derivadas son coeficientes constantes), que es fácil de resolver. La solución será una función del tiempo $x = x(t)$ de forma que satisfaga la ecuación diferencial, es decir, ω_0^2 por la función $x(t)$, más dos veces β por la derivada de la función, más la derivada segunda de la función es igual a cero. La solución es una función del tipo $x = e^{ct}$ donde la constante c toma el valor:

$$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \tag{8}$$

Demostración: *Para encontrar qué función del tiempo satisface lo anterior, probamos una función del tipo $x = e^{ct}$, donde c es una constante por determinar. Si sustituimos esto en la ecuación diferencial, queda:*

$$\frac{d^2e^{ct}}{dt^2} + 2\beta\frac{de^{ct}}{dt} + \omega_0^2 e^{ct} = 0 \Longrightarrow c^2e^{ct} + 2\beta c e^{ct} + \omega_0^2 e^{ct} = 0 \ , \ \forall$$

Esta última ecuación se puede simplificar y queda:

$$c^2 + 2\beta c + \omega_0^2 = 0 \tag{9}$$

que representa una ecuación de segundo grado donde la incógnita es c. Es fácil resolverla y se obtiene la expresión (8). ■

Una vez conocida esta constante c en la exponencial se obtiene la función $x = x(t)$ que cumple la ecuación diferencial (9). Debido a que el argumento de la raíz cuadrada puede ser positivo, negativo o cero, se pueden tener tres tipos de soluciones distintas:

1. $\beta < \omega_0 \Longrightarrow$ amortiguamiento débil.
2. $\beta = \omega_0 \Longrightarrow$ amortiguamiento crítico.
3. $\beta > \omega_0 \Longrightarrow$ sobreamortiguamiento.

A continuación procedemos a estudiar cada uno de los tres casos por separado.

5.1. Amortiguamiento débil ($\beta < \omega_0$)

En este caso $\beta < \omega_0$, la ecuación del movimiento queda:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0) \tag{10}$$

La amplitud A y la fase inicial ϕ_0 son constantes reales y positivas que se determinan con las condiciones iniciales, mientras que ω es la frecuencia del movimiento oscilatorio amortiguado ω (no confundir con la frecuencia natural que tiene el movimiento oscilatorio sin amortiguar que en esta sección se ha notado como ω_0) que se define como:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

y es una propiedad del oscilador.

Demostración: *En este caso, el factor de amortiguamiento será menor que la frecuencia natural del amortiguador, lo que produce que el argumento de la raíz cuadrada en (8) sea negativo y habría que recurrir a números complejos para obtener el valor de c. Concretamente, si i es la unidad imaginaria (igual a $\sqrt{-1}$), se obtienen dos valores para c, c_1 y c_2:*

$$c = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \Longrightarrow \begin{cases} c_1 = -\beta + i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \\ c_2 = -\beta - i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \end{cases}$$

Al tener dos valores de c, tenemos dos funciones $x_1 = e^{c_1 t}$ y $x_2 = e^{c_2 t}$ que cumplen la ecuación diferencial (9). Es fácil ver que una combinación lineal de x_1 y x_2 también será una solución de la ecuación diferencial, y precisamente ésta será la forma más general de la solución de (9), que coincidirá con la ecuación del movimiento:

$$x(t) = A_1e^{c_1 t} + A_2e^{c_2 t}$$

donde A_1 y A_2 son constantes desconocidas que se fijan con las condiciones iniciales del problema. Como estamos utilizando número complejos, estas constantes en principio pueden ser complejas. Si se define la frecuencia del movimiento oscilatorio amortiguado como se ha dicho antes:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

las constantes c_1 y c_2 quedan como:

$$c_1 = -\beta + i\omega \quad y \quad c_2 = -\beta - i\omega$$

Con esto, la ecuación del movimiento queda:

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta+i\omega)t} + A_2 e^{(-\beta-i\omega)t} = e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{11}$$

Aunque estamos utilizando números complejos, no podemos olvidar que $x(t)$ será la posición que ocupará una partícula en función del tiempo y por lo tanto debe ser un número real. Esto implica que la parte imaginaria de la expresión (11) tiene que ser nula. Para imponer esta condición hay que tener en cuenta que para un número complejo z, su parte imaginaria $\Im(z)$ se puede obtener como:

$$\Im(z) = \frac{z - z^*}{2}$$

donde z^* es el conjugado de z. En nuestro caso, $\Im(x)$ se obtendrá como:

$$\begin{aligned}\Im(x) &= \frac{e^{-\beta t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right) - e^{-\beta t}\left(A_1^* e^{-i\omega t} + A_2^* e^{i\omega t}\right)}{2} \\ &= \frac{e^{-\beta t}}{2}\left((A_1 - A_2^*)e^{i\omega t} - (A_1^* - A_2)e^{-i\omega t}\right) = \frac{e^{-\beta t}}{2}\left((A_1 - A_2^*)e^{i\omega t} - (A_1 - A_2^*)^* e^{-i\omega t}\right)\end{aligned}$$

Para que la anterior expresión sea nula para cualquier tiempo es necesario que se cumpla

$$A_1 = A_2^*$$

Si esta condición se sustituye en (11), expresando la constante compleja A_1 en función de su módulo A y su fase ϕ_0 como $A_1 = Ae^{i\phi_0}$, se obtiene:

$$x(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{i(\omega t+\phi_0)} + Ae^{-i(\omega t+\phi_0)}\right)$$

Por otro lado el coseno se puede expresar en función de exponenciales complejas como:

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

Con lo que la expresión del movimiento resulta (10). ■

En muchos libros es más usual encontrar la expresión (10) en función de la función seno, lo que se puede hacer utilizando otra fase inicial $\varphi_0 = \phi_0 + \frac{\pi}{2}$, y la ecuación del movimiento resultaría:

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0) \tag{12}$$

Las expresiones (10) y (12) son idénticas y se pueden interpretar como una oscilación de frecuencia angular ω donde la amplitud decae con el tiempo como $Ae^{-\beta t}$. En la Figura 4 se representa el movimiento de un oscilador débilmente amortiguado, indicando también el decaimiento exponencial que tiene la amplitud.

Es conveniente notar que cuando un oscilador está amortiguado la frecuencia con la que oscila es menor que la frecuencia natural del oscilador, tanto menor cuánto más importante sea el amortiguamiento.

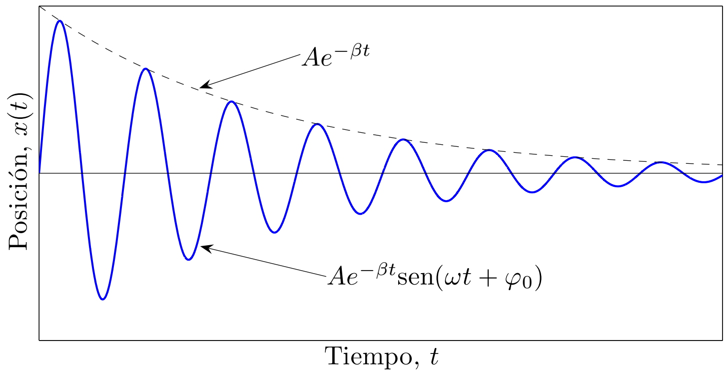

Figura 4: *Posición en función del tiempo para un oscilador débilmente amortiguado ($\beta < \omega_0$)*

5.2. Amortiguamiento crítico ($\beta = \omega_0$)

En este caso el factor de amortiguamiento es numéricamente igual a la frecuencia natural del oscilador, es decir

$$\beta = \omega_0$$

Si esto se sustituye en (8) se obtiene una única solución para la constante de la exponencial:

$$c = -\beta$$

En este caso, la solución de la ecuación diferencial (7) proporciona una ecuación del movimiento que tiene una expresión:

$$x(t) = (A_0 + A_1 t)e^{-\beta t} \tag{13}$$

donde A_0 y A_1 son constantes reales que se determinan a partir de las constantes iniciales. Esto es fácil de hacer calculando la velocidad como la derivada de la posición con respecto al tiempo:

$$v(t) = (A_1 - \beta A_0 - \beta A_1 t)e^{-\beta t}$$

y obteniendo la expresión de la posición inicial y la velocidad inicial, x_0 y v_0, como:

$$\begin{array}{l} x_0 = A_0 \\ v_0 = A_1 - \beta A_0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} A_0 = x_0 \\ A_1 = v_0 + \beta x_0 \end{array}$$

El movimiento representado en (13) tiende a cero, como en el caso de amortiguamiento débil, pero no es oscilante, lo que se puede comprobar calculando en qué puntos la posición se hace nula, es decir, para qué valores de t se cumple $x(t) = 0$:

$$x(t) = 0 \implies (A_0 + A_1 t)e^{-\beta t} = 0$$

Como la exponencial nunca puede ser cero para un tiempo finito, es la expresión entre paréntesis la que tiene que ser igual a cero:

$$(A_0 + A_1 t) = 0 \implies t = -\frac{A_0}{A_1} = -\frac{x_0}{v_0 + \beta x_0}$$

Si $x_0 > 0$, para que la posición se haga nula en un tiempo positivo se necesita que $v_0 < -\beta x_0$. En este caso la posición se hará nula para un único instante. En el caso de que $v_0 > -\beta x_0$, la posición sólo se anulará en un tiempo infinito. En cualquier caso, se puede ver que no es el comportamiento de un movimiento oscilante, donde la posición se anularía periódicamente. En la Figura 5 se representa el movimiento de un oscilador críticamente amortiguado en función del tiempo para distintos valores valores de la velocidad inicial. Se puede comprobar cómo el movimiento sigue el comportamiento que se ha predicho anteriormente.

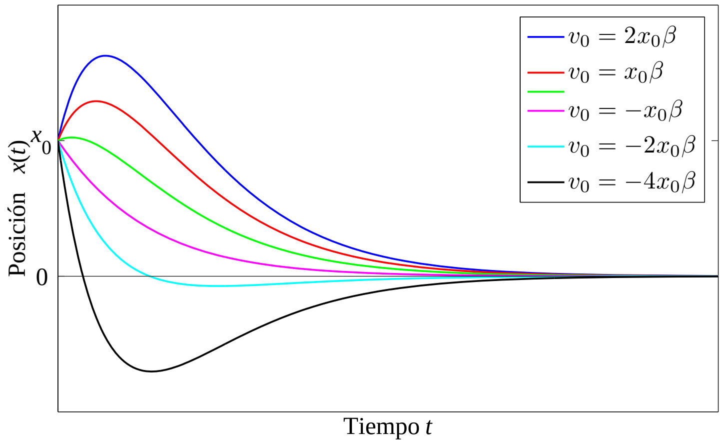

Figura 5: *Posición en función del tiempo para un oscilador críticamente amortiguado ($\beta = \omega_0$)*

5.3. Sobreamortiguamiento ($\beta > \omega_0$)

Esta situación corresponde al caso en el que el amortiguamiento sea muy importante, concretamente cuando:

$$\beta > \omega_0$$

Si esto se sustituye en (8) se tiene:

$$c = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

que corresponde con dos soluciones reales, c_1 y c_2:

$$c_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \;\; \text{y} \;\; c_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

ambas negativas, siendo c_1 siempre de menor módulo que c_2. La solución de la ecuación del movimiento (7) queda:

$$x(t) = A_1 e^{c_1 t} + A_2 e^{c_2 t} \tag{14}$$

que corresponde a dos exponenciales decrecientes (recordar que tanto c_1 como c_2 son constantes negativas), donde A_1 y A_2 son constantes que se determinan a partir de las condiciones iniciales.

Al igual que en caso anterior, la ecuación (14) representa un movimiento que tiende a cero al aumentar el tiempo pero no de una forma oscilante, ya que es fácil ver que para que la posición se anule es necesario que:

$$A_1 e^{c_1 t} = -A_2 e^{c_2 t} \implies e^{(c_1 - c_2)t} = -\frac{A_1}{A_2} \implies t = \frac{1}{c_1 - c_2} \ln\left(-\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Esto implica que durante el movimiento, la posición se anula una o ninguna vez.

A modo de resumen de esta sección, en la Figura 6 se presenta la posición en función de tiempo para los tres tipos de amortiguamiento posibles. En los tres casos la velocidad inicial es cero y la posición inicial x_0 la misma. Se puede obtener una propiedad común a los tres amortiguamientos: los tres decaen exponencialmente con el tiempo.

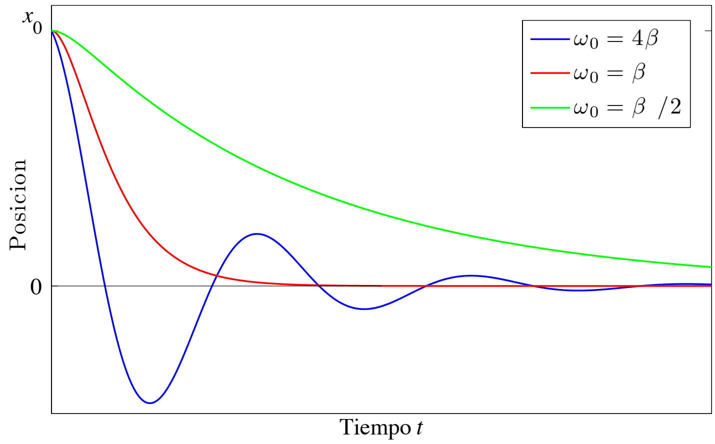

Figura 6: *Posición en función del tiempo para tres osciladores con tres relaciones distintas entre* ω_0 *y* β

6. Oscilaciones forzadas

En la sección anterior se estudió cómo se comporta un oscilador en la situación en la que existe amortiguamiento, que suele ser la más común en situaciones prácticas. El resultado es que existen tres situaciones distintas, y sólo en una se puede hablar de oscilación, que es en el caso de amortiguamiento débil. En esta sección se estudiará cómo se comportará un oscilador amortiguado cuando existe una fuerza externa aplicada sobre él $F_e(t)$, que es función del tiempo. La segunda ley del Newton aplicada a este caso quedaría:

$$F_e(t) - \gamma v - kx = ma \implies a + \frac{\gamma}{m}v + \frac{k}{m}x = \frac{F_e(t)}{m} \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_e(t)}{m} \qquad (15)$$

Si, al igual que se hizo en la sección anterior, se utiliza que $\beta = \frac{\gamma}{2m}$ y $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_e(t)}{m} \qquad (16)$$

que es la misma ecuación diferencial que en (7), pero igualada a $\frac{F_e(t)}{m}$ en vez de a cero.

La incógnita de una ecuación diferencial es una función, en nuestro caso $x(t)$, de forma que la ecuación relaciona sus derivadas y posiblemente otras funciones con ella. Cuando una ecuación diferencial está igualada a cero se denomina *homogénea*, y es el caso que estudiamos en la Sección 5. La solución de la ecuación homogénea la denominaremos $x_h(t)$ y en nuestro caso será una de las ecuaciones (12), (13) o (14), dependiendo de la relación entre ω_0 y β.

Cuando la ecuación diferencial no está igualada a cero sino a una función $\frac{F_e(t)}{m}$, como en (16), la ecuación diferencial se denomina *no homogénea* y es el caso que nos ocupa en esta sección. La solución más general de esta ecuación diferencial es:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \tag{17}$$

donde $x_h(t)$ ya hemos visto que es la solución de la ecuación diferencial homogénea, mientras que $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación no homogénea. La denominación de "particular" se debe a que $x_p(t)$ no tiene ninguna constante indeterminada que se fije con las condiciones iniciales, como tiene $x_h(t)$, sino que está completamente determinada con la información contenida en la ecuación diferencial. El aspecto más importante de la solución (17) es que cualquiera que sea la forma de $x_h(t)$ que hemos visto, todas tienden a cero de forma exponencial, de manera que pasado un tiempo "suficientemente" grande, $x(t)$ es igual a la solución particular de la ecuación diferencial $x_p(t)$.

Para obtener $x_p(t)$ es necesario conocer la forma explícita de $F_e(t)$. En general, no será posible obtener analíticamente la solución particular para cualquier $F_e(t)$, pero sí es posible para una fuerza que sea periódica. La obtención de esta solución para una fuerza periódica cualquiera queda fuera de los objetivos del curso, ya que necesita del uso del análisis de Fourier. Sin embargo, sí es relativamente sencillo encontrar cómo se moverá un oscilador forzado con una fuerza sinusoidal, es decir para:

$$F_e(t) = F_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

y es lo que se realizará a continuación.

Es importante notar que en este apartado ω es la frecuencia de la fuerza externa y no depende de ninguna de las propiedades del oscilador, sino que únicamente es una característica de la fuerza que se utiliza.

Con esta tipo de fuerza externa la ecuación diferencial (16) queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen}(\omega t)$$

Si se nota $\alpha_m = \frac{F_0}{m}$, la ecuación diferencial queda finalmente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \alpha_m \operatorname{sen}(\omega t) \tag{18}$$

La solución particular $x_p(t)$ resulta :

$$x_p(t) = A \operatorname{sen}(\omega t - \delta) \tag{19}$$

donde la amplitud A y el desfase δ **no** dependen de las condiciones iniciales sino que se obtienen de las propiedades del oscilador como:

$$A = \frac{\alpha_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \quad \text{y} \quad \delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{20}$$

El signo menos que aparece delante del desfase en la ecuación (19) se toma para que δ tome valores en el intervalo $[0, \pi]$, pero la posición siempre va a estar retardada respecto a la fuerza.

Por tanto, una vez haya transcurrido un tiempo suficiente, el oscilador se moverá según indica la función (19), donde A y δ son las constantes expresadas en (20).

Demostración: *La forma más sencilla de resolver la ecuación diferencial (18) es notar que si tenemos la ecuación diferencial compleja:*

$$\frac{d^2x^c}{dt^2} + 2\beta\frac{dx^c}{dt} + \omega_0^2 x^c = \alpha_m e^{i\omega t} \tag{21}$$

la parte imaginaria de la función compleja $x^c(t)$ corresponderá con la función $x(t)$ que estamos buscando, ya que β, ω y α_m son reales y la parte imaginaria de $e^{i\omega t}$ corresponde con $\operatorname{sen}(\omega t)$. Por tanto, una vez encontrada $x^c(t)$ sólo habrá que tomar la parte imaginaria para obtener la solución particular que nos falta para determinar cómo se mueve el oscilador.

Para encontrar la función $x^c(t)$ se prueba una solución del tipo $x^c(t) = A^c e^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia de la fuerza externa y A^c es una función compleja de la forma $A^c = Ae^{-j\delta}$ (el signo menos de la fase está elegido simplemente porque es lo habitual en la literatura). Si esta función se sustituye en (21) se obtiene:

$$-\omega^2 A^c e^{i\omega t} + 2i\beta\omega A^c e^{i\omega t} + \omega_0^2 A^c e^{i\omega t} = \alpha_m e^{i\omega t} \implies -\omega^2 A^c + 2i\beta\omega A^c + \omega_0^2 A^c = \alpha_m$$

La única constante que queda por determinar en $x^c(t)$ es A^c que se puede despejar de la anterior ecuación y queda:

$$A^c = \frac{\alpha_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}$$

Para determinar la amplitud y la fase de la constante A^c se multiplica y divide por el complejo conjugado del denominador:

$$A^c = \frac{\alpha_m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i2\beta\omega}\frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i2\beta\omega} = \frac{\alpha_m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}\Big((\omega_0^2 - \omega^2) - i2\beta\omega\Big)$$

El módulo A de A^c es la raíz cuadrada de la parte real al cuadrado más la parte imaginaria al cuadrado, lo que resulta:

$$A = \sqrt{\frac{\alpha_m^2}{\Big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\Big)^2}\Big((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\Big)} = \frac{\alpha_m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

La fase δ de A^c se calcula como la arcotangente de menos el cociente entre la parte imaginaria y la parte real, es decir:

$$\delta = \arctan\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Una vez conocida la tangente de δ se puede conocer el seno y el coseno de este ángulo, sin más que utilizar la relación que existe entre estas funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\delta) =& \frac{\tan(\delta)}{\sqrt{1+\tan^2(\delta)}} = \frac{\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}{\sqrt{1+\frac{4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} = \frac{2\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \\ \cos(\delta) =& \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\delta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\beta^2\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2}}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{22}$$

Tras estos cálculos, la función compleja $x^c(t)$ resulta:

$$x^c(t) = Ae^{i(\omega t+\delta)}$$

donde A y δ cumplen la expresión que aparece en (20). Una vez obtenido $x^c(t)$, la solución particular $x_p(t)$ se obtiene tomando la parte imaginaria, lo que lleva a la expresión (19). ■

6.1. Resonancia en la amplitud

Es fácil ver cómo la amplitud y la fase de las oscilaciones dependen de la frecuencia de la fuerza impulsora ω.

Por un lado, la amplitud varía con la frecuencia según la forma expresada en (20). En esta ecuación se puede comprobar cómo para ω bajas ($\omega << \omega_0$) la amplitud tiende a un valor constante igual a $\frac{\alpha_m}{\omega_0^2}$. Por otro lado, en el caso de frecuencias muy altas, la amplitud tiende a cero. Los posibles máximos y mínimos que puedan ocurrir para frecuencias intermedias se obtienen de la solución de la ecuación que resulta de hacer la derivada de la amplitud con respecto a ω igual a cero:

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \implies \frac{\alpha_m 2\omega\left((\omega_0^2 - \omega^2) - 2\beta^2\right)}{\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right)^{3/2}} = 0 \implies \begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \end{cases}$$

Para valores de β y ω_0 tales que $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$, la amplitud tiene un mínimo para $\omega = 0$, que ya hemos visto con un valor $A = \frac{\alpha_m}{\omega_0^2}$, y un máximo para $\omega = \omega_{RA} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ donde la amplitud toma un valor:

$$A_{RA} = \frac{\alpha_m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Como es fácil ver, este máximo tiene tanto más valor cuanto menor sea el amortiguamiento y por tanto β. En el límite de amortiguamiento nulo, la amplitud toma un valor infinito en el máximo, que aparece a una frecuencia $\omega_{RA} = \omega_0$. El comportamiento que presenta la amplitud a ω_{RA} se conoce como *resonancia en la amplitud*, de forma que ω_{RA} es la frecuencia de resonancia en la amplitud.

Para valores de β y ω_0 tales que $\omega_0 < \sqrt{2}\beta$, la amplitud presenta un máximo en $\omega = 0$ y decrece al aumentar la frecuencia. En la Figura 7 se representa la amplitud de las oscilaciones forzadas en función de la frecuencia de la fuerza externa, para distintos valores de la relación ω_0/β. Puede observarse el resultado que hemos analizados que sólo aparece resonancia (es decir, un máximo) cuando $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$.

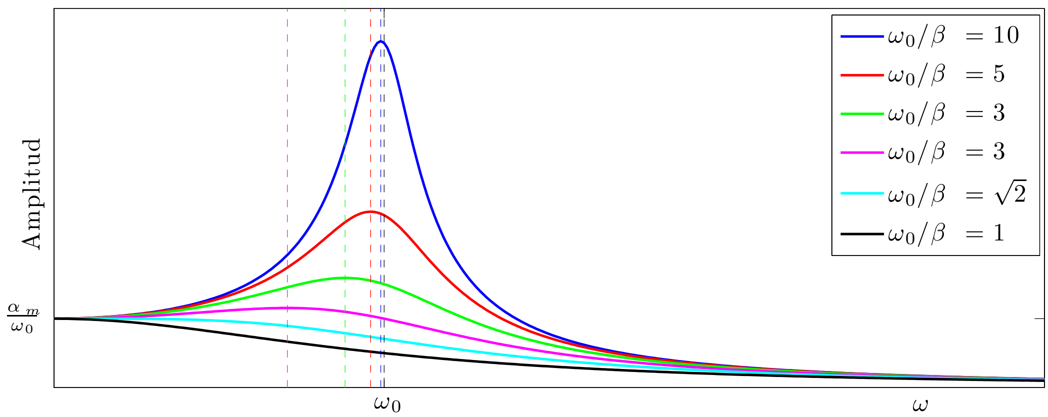

Figura 7: *Amplitud de las oscilaciones en función de la fuerza impulsora para distintos valores de la relación ω/β*

Por su parte, en ecuación (20) se observa cómo la fase δ es positiva y tiende a cero al tender la frecuencia a cero ($\omega << \omega_0$). A medida que aumenta la frecuencia, también lo hace el argumento de la arcotangente, aumentando así la fase δ, hasta $\omega = \omega_0$, donde el argumento se hace infinito, lo que representa una fase de $\delta = \frac{\pi}{2}$. A partir de ese momento, al aumentar la frecuencia, el argumento de la arcotangente es negativo y decreciente, lo que implica que la fase ha pasado el valor $\frac{\pi}{2}$ y va aumentando. Para frecuencias muy grandes ($\omega \to \infty$), el argumento de la arcotagente vuelve a tender a cero, pero esta vez a través de números negativos, por lo que la fase tiende a π. Este comportamiento se recoge como:

- Para $\omega \to 0$, entonces $\delta \to 0$.
- Para $\omega = \omega_0$, entonces $\delta = \frac{\pi}{2}$.
- Para $\omega \to \infty$, entonces $\delta \to \pi$.

En la Figura 8 se representa la fase δ entre 0 y π en función de la frecuencia de la fuerza exterior para distintos valores de la relación ω_0/β.

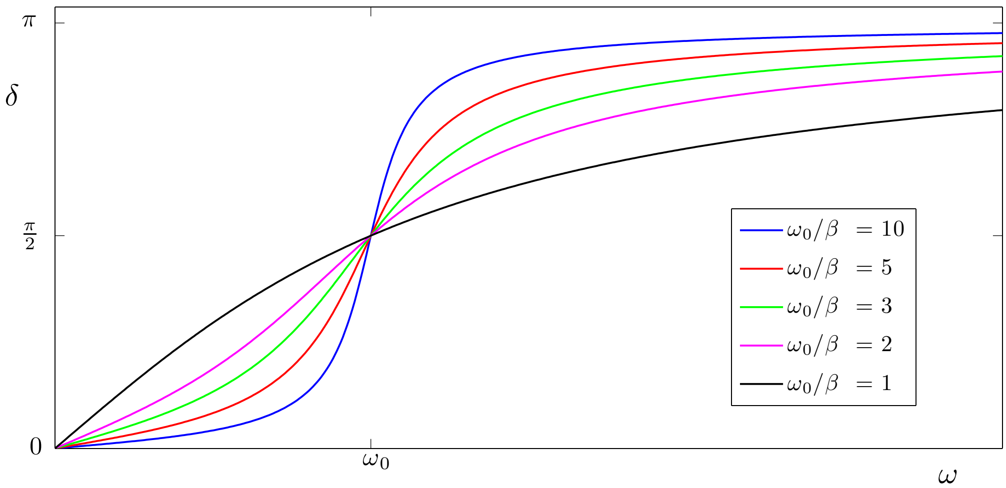

Figura 8: *Fase δ en función de la frecuencia de la fuerza impulsora para distintos valores de la relación ω_0/β*

6.2. Resonancia en la potencia

En muchos sistemas físicos, lo importante no es la amplitud con la que oscila el oscilador sino la potencia que el oscilador extrae de la fuerza que se le aplica, que será igual pero cambiada de signo a la potencia que la fuerza exterior realiza sobre el oscilador. Esta potencia $P(t)$, que será una función del tiempo, se puede calcular como:

$$P(t) = F(t)v(t)$$

donde $F(t)$ es la fuerza exterior y $v(t)$ es la velocidad del oscilador. En el estado estacionario, la velocidad del oscilador se obtiene derivando la solución particular $x_p(t)$ y resulta:

$$v(t) = A\omega\cos(\omega t - \delta)$$

Con esto, la potencia media P_m, que es la media temporal de la potencia instantánea $P(t)$, se puede calcular y queda:

$$P_m = \frac{F_0^2}{4\beta m}\,\mathrm{sen}^2(\delta) \tag{23}$$

Demostración: *La potencia instantánea $P(t)$ se obtiene sin más que sustituir las expresiones de $F(t)$ y $v(t)$ y resulta:*

$$\begin{aligned} P(t) =& F_0 A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t-\delta) = F_0 A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\big(\cos(\omega t)\cos(\delta)+\mathrm{sen}(\omega t)\,\mathrm{sen}(\delta)\big) \\ =& F_0 A\omega\big(\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\delta)+\mathrm{sen}^2(\omega t)\,\mathrm{sen}(\delta)\big) \end{aligned}$$

Como puede verse, la potencia depende del tiempo y será una función oscilante, al igual que la fuerza y la velocidad. En general, no interesa tanto la potencia instantánea que se acaba de calcular como la ***potencia media*** *P_m, que es el promedio de la potencia en un periodo. Para calcular esta potencia media se integra la potencia durante un periodo y se divide por la duración de dicho periodo:*

$$\begin{aligned} P_m =& \frac{1}{T}\int_t^{t+T} P(t)dt = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} F_0 A\omega\big(\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\cos(\delta)+\mathrm{sen}^2(\omega t)\,\mathrm{sen}(\delta)\big)dt \\ =& \frac{F_0 A\omega}{T}\left(\cos(\delta)\int_t^{t+T}\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)dt + \mathrm{sen}(\delta)\int_t^{t+T}\mathrm{sen}^2(\omega t)dt\right) \\ =& \frac{F_0 A\omega}{T}\left(\cos(\delta)\int_t^{t+T}\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\omega t)dt + \mathrm{sen}(\delta)\int_t^{t+T}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2}dt\right) \\ =& \frac{F_0 A\omega}{T}\left(\cos(\delta)\left[\frac{\mathrm{sen}^2(\omega t)}{2}\right]_t^{t+T} + \mathrm{sen}(\delta)\left[\frac{2t-\mathrm{sen}(\omega t)}{4}\right]_t^{t+T}\right) = \frac{F_0 A\omega}{T}\,\mathrm{sen}(\delta)\frac{T}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la potencia media queda:

$$P_m = \frac{F_0 A\omega}{2}\,\mathrm{sen}(\delta)$$

De las ecuaciones (20) y (22) se puede ver que:

$$A = \frac{\alpha_m}{2\beta\omega}\,\mathrm{sen}\,\delta$$

lo que se sustituye en la expresión de P_m, teniendo en cuenta que $\alpha_m = \frac{F_0}{m}$ y se obtiene la ecuación (23). ■

Como se vio con anterioridad, para frecuencias bajas la fase δ tiende a cero, para frecuencias altas a π, mientras que para $\omega = \omega_0$ la fase es igual a $\frac{\pi}{2}$. Por tanto, la potencia media absorbida por el oscilador será nula para frecuencias bajas y altas, presentando un máximo para $\omega = \omega_0$, ya que en este caso el seno toma su valor máximo, de valor $\frac{F_0^2}{4\beta m}$. Al igual que sucedía en la amplitud, el máximo de P_m será tanto mayor cuanto menor sea el amortiguamiento, y en el límite de amortiguamiento nulo tiende a infinito. Este comportamiento de P_m queda recogido en la Figura 9, donde se representa la potencia media absorbida por el oscilador en función de la frecuencia de la fuerza externa.

6.3. Relación con circuitos RLC

En la Figura 10(a) se presenta un circuito RLC en serie con una generador de tensión en alterna. De la asignatura Análisis de Circuitos sabemos que la tensión del generador será igual a la suma de las caídas de tensión en cada uno de los elementos del circuito en serie, es decir:

$$L\frac{dI(t)}{dt} + RI(t) + \frac{1}{C}q = V_e(t)$$

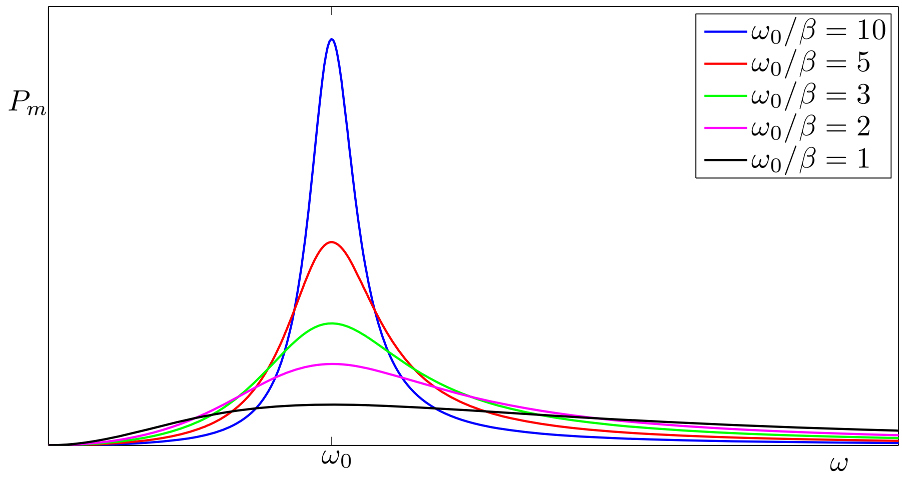

Figura 9: *Potencia media absorbida por el oscilador en función de frecuencia de la fuerza impulsora para distintos valores de la relación ω_0/β*

donde q es la carga. Utilizando que $\frac{dq}{dt} = I(t)$, la anterior ecuación queda

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_e(t)$$

que tiene la misma forma que la ecuación (15), que era la ecuación diferencial del movimiento del oscilador forzado y amortiguado:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = F_e(t)$$

Por la tanto, un oscilador forzado y amortiguado se comporta como un circuito RLC, de autoinducción m, capacidad $1/k$ y resistencia γ, en serie con un generador de tensión $F_e(t)$. La carga en un circuito sería equivalente a la posición, la intensidad equivalente a la velocidad y la tensión equivalente a la fuerza. Este circuito mecánico equivalente se representa en la Figura 10(b).

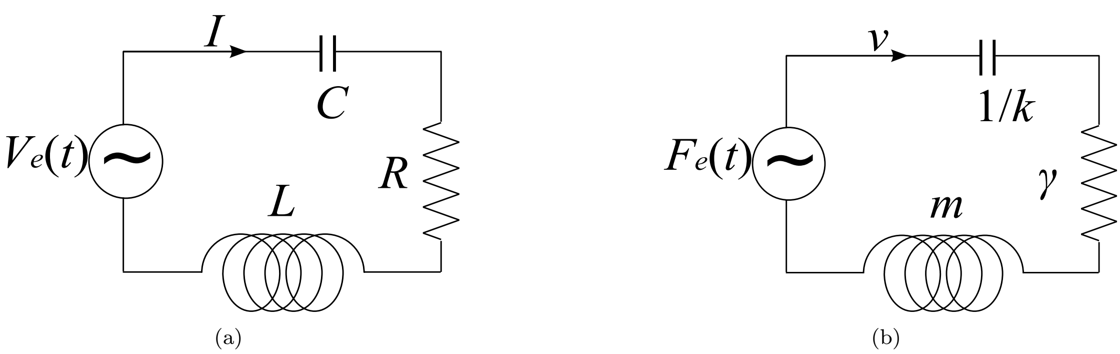

Figura 10: *(a) Circuito RLC y (b) circuito mecánico equivalente*

Se puede aplicar todo lo que se ha estudiado referente a circuitos RLC, como por ejemplo que un oscilador amortiguado corresponde con el transitorio de un circuito RLC, donde el condensador se descarga.