

Tema 3. Ondas.

*David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012*

Índice

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Descripción matemática del movimiento ondulatorio | 4 |
| 2.1. Onda plana | 4 |
| 2.2. Ecuación de una onda plana | 6 |
| 2.3. Ondas armónicas | 7 |
| 2.4. Ejemplos | 8 |
| 2.4.1. Ondas transversales en una cuerda sometida a tensión | 9 |
| 2.4.2. Ondas longitudinales en un fluido | 10 |
| 3. Energía de una onda, intensidad y absorción | 13 |
| 3.1. Potencia de una onda | 13 |
| 3.2. Intensidad de una onda | 15 |
| 3.3. Absorción | 16 |
| 4. Fenómenos ondulatorios | 16 |
| 4.1. Efecto Doppler | 17 |
| 4.2. Onda de Mach | 19 |
| 4.3. Reflexión y refracción | 20 |
| 4.4. Superposición e interferencia | 22 |
| 4.5. Difracción | 24 |
| 5. Ondas estacionarias | 26 |
| 5.1. Ondas confinadas | 27 |

1. Introducción

Se entiende por *onda* una perturbación o variación de alguna magnitud física que se propaga en el tiempo y en el espacio.

Los fenómenos ondulatorios se pueden encontrar en todos los campos de la física, de esta forma podemos hablar de ondas mecánicas, ondas térmicas, ondas electromagnéticas u ondas gravitacionales. En cada una de estas ondas se propaga una perturbación de una magnitud mecánica (presión, posición, etc.), termodinámica (temperatura), electromagnética o gravitatoria, respectivamente.

Este tema se centrará sobre el estudio de ondas mecánicas, en las que lo que se propaga es la variación de una magnitud propia de esta parte de la física y siempre se podrá ver como una variación de la posición de las partículas del medio por el que se propague la onda. Por lo tanto, este tipo de ondas no tiene sentido en ausencia de materia, aunque hay otras ondas que sí se pueden propagar en el vacío, como las ondas electromagnéticas o las gravitatorias.

Las ondas se propagan a una cierta velocidad que se conoce como *velocidad de onda*. Para las ondas mecánicas esta velocidad dependerá de las propiedades elásticas e inerciales del medio, de forma que mientras más elástico sea mayor será la velocidad, y mientras más inercial sea (más “pese”) menor será la velocidad.

Es importante subrayar que las ondas mecánicas no implican un transporte de materia, sino sólo de energía.

Las ondas se pueden clasificar atendiendo a distintos aspectos de las magnitudes físicas que se propaguen. Así atendiendo al carácter escalar o vectorial de la magnitud que se propague las ondas pueden ser:

- Escalares: la magnitud que se propaga es escalar. Por ejemplo, ondas de presión, de densidad, de temperatura, etc.
- Vectoriales: la magnitud que se propaga es un vector. Por ejemplo, ondas en la superficie de un fluido, ondas en una cuerda, ondas electromagnéticas, etc.

Dentro de las ondas vectoriales, en cada punto por el que pase la onda, el vector de la magnitud que se propaga puede ser perpendicular o paralelo a la dirección de la propagación de la onda en ese punto, de forma que las ondas vectoriales se pueden clasificar en:

- Longitudinales: la magnitud vectorial que se propaga es paralela a la dirección de propagación. Por ejemplo, el sonido.
- Transversales: la magnitud vectorial que se propaga es perpendicular a la dirección de propagación. Por ejemplo, las ondas en una cuerda.

Las ondas vectoriales no tienen que ser siempre ondas longitudinales o transversales, sino que pueden ser una mezcla, como le sucede a las ondas en la superficie de un fluido.

En función de las dimensiones en las que se propague la onda esta puede ser:

- Unidimensional: la onda se propaga en una única dimensión. Por ejemplo, las ondas en una cuerda.
- Bidimensional: la onda se propaga en dos dimensiones. Por ejemplo, las ondas en la superficie del agua.
- Tridimensional: la onda se propaga en tres dimensiones. Por ejemplo, el sonido producido por la sirena de una ambulancia.

El *frente de onda* es el lugar geométrico del espacio en el que se encuentran los puntos en los que la onda que tienen una misma *fase*. El concepto de *fase* se definirá más adelante, pero cada valor de la fase representa un “estado” de la onda, por ejemplo un máximo o un mínimo de la forma de onda. En este sentido, los puntos de igual fase son puntos en los cuales la onda se encuentran en un mismo estado, por ejemplo, los puntos donde en un instante se encuentra el máximo de una onda. Si la onda consiste es una variación intensa pero que dura poco, como el pulso de una onda de choque, el frente de onda sería los puntos a los que la onda llega a la vez. En función de la geometría del frente de onda las ondas pueden ser:

- Planas: los puntos a los cuales la onda llega a la vez (frente de onda) forman un plano. Por ejemplo, el sonido a lo largo de tubos cilíndricos.
- Circulares: los frentes de onda son circunferencias. Por ejemplo, ondas en la superficie del agua, producidas por la caída de un cuerpo pequeño.
- Esféricas: los frentes de ondas son esferas. Por ejemplo, el sonido producido en el espacio por una fuente sonora pequeña.
- Cilíndricas: los frentes de ondas son cilindros. Por ejemplo, el sonido producido por una cuerda tensa al vibrar.
- \vdots

2. Descripción matemática del movimiento ondulatorio

Aunque el tratamiento general de ondas requiere herramientas matemáticas superiores a las que se poseen en este curso, para ondas en una dimensión cuya forma no varía durante la propagación el tratamiento matemático es significativamente más sencillo. En este tema nos centraremos casi por completo en este tipo de onda, que se suelen denominar *onda plana* porque suele ir asociada con un frente de onda plano, y dentro de ellas en ondas en las que la perturbación que se propaga es de tipo armónico (oscilaciones como las estudiadas en el Tema 2).

2.1. Onda plana

Como ya se ha dicho, las ondas unidimensionales cuya forma no varía durante la propagación se conocen también como *ondas planas*, en las que (como su nombre indica) el frente de onda será un plano.

El ejemplo más intuitivo de este tipo de ondas es el que ocurre en una cuerda tensa, y es en el que deduciremos la mayor parte de los resultados de este tema, aunque la mayoría de las conclusiones se podrán extender a cualquier tipo de onda plana. Por simplicidad, imaginemos que estamos trabajando con una cuerda tensa, coincidente con el eje x . Cuando algún punto de la cuerda se desplaza hacia arriba o hacia abajo arrastra los puntos colindantes en su movimiento, y estos a los siguientes puntos, produciendo una onda que viajará a lo largo de la cuerda. Así, debido al paso de la onda, un punto de la cuerda que se encuentre en una posición x genérica se moverá según:

$$y(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (1)$$

donde $g(\cdot)$ es una función cualquiera y c es la velocidad a la que se propaga la onda.

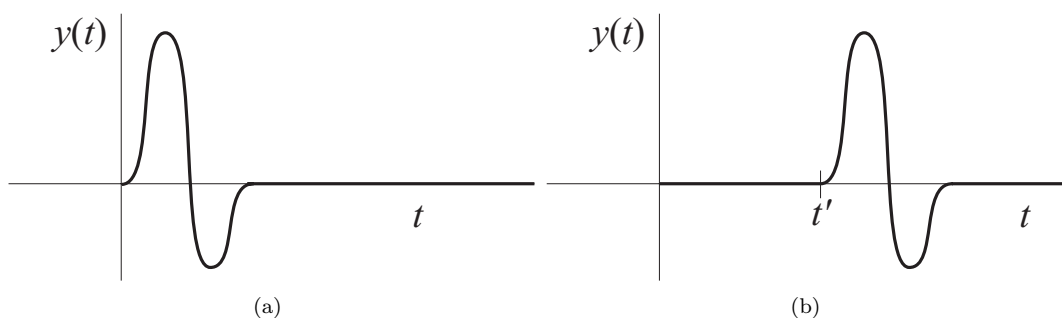


Figura 1: Movimiento de: (a) punto de la cuerda en $x = 0$, (b) punto de la cuerda en x' .

Demostración: Supongamos que debido al paso de la onda por un punto situado en $x = 0$, este punto se moverá a lo largo del eje y como:

$$y(x = 0, t) = g(t)$$

donde $g(t)$ es una función del tiempo que no es otra cosa que la ecuación del movimiento (en este caso vertical) del punto de la cuerda situado a en $x = 0$. En la Figura 1(a) se representa un ejemplo en el que, primero el trozo de cuerda en $x = 0$ sube, llega a un máximo, baja pasando por el cero, llega a un mínimo y vuelve a subir hasta volver a la posición original ($y = 0$).

Que la forma de onda no varíe significa que otros puntos situados a distinto x se moverán de la misma forma que en el origen pero algo más tarde, cuando la onda haya llegado hasta ellos. Entonces, un punto situado, por ejemplo, en $x = x'$ se moverá como:

$$y(x = x', t) = g(t - t')$$

donde t' es el tiempo que ha tardado la onda en llegar desde $x = 0$ hasta $x = x'$. Si la onda se propaga a una velocidad c es fácil ver que este tiempo es $t' = \frac{x'}{c}$, y el punto en x' se moverá como:

$$y(x = x', t) = g\left(t - \frac{x'}{c}\right)$$

Este comportamiento aparece esquematizado en la Figura 1(b), donde se muestra cómo se mueve un punto situado en x' en función del tiempo por el efecto de la onda generada en $x = 0$.

Conviene resaltar que las figuras 1(a) y 1(b) no corresponden con una imagen de la cuerda en un determinado instante, sino con la variación de altura que experimentarán los puntos $x = 0$ y $x = x'$ en función del tiempo.

De una forma general, un punto x cualquiera se moverá siguiendo un movimiento:

$$y(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

que describe cómo varía la posición de la cuerda en función del tiempo y del espacio, por lo que es la expresión que describe cómo se propaga la onda de altura en la cuerda, obteniéndose la ecuación (1).

Si se realizará una foto en el instante t_1 en el que la onda acaba de terminar de pasar por el origen, el resultado sería la Figura 2(a). Se puede ver cómo la forma que toma la onda en el espacio está invertida respecto la forma que tiene la función de variación de la posición de un punto en función del tiempo. Esto se debe al signo menos que acompaña al espacio en la expresión de la onda. En la Figura 2(b) se representa lo mismo pero en el instante t_2 en el que la onda acaba de terminar de pasar por el punto x' . ■

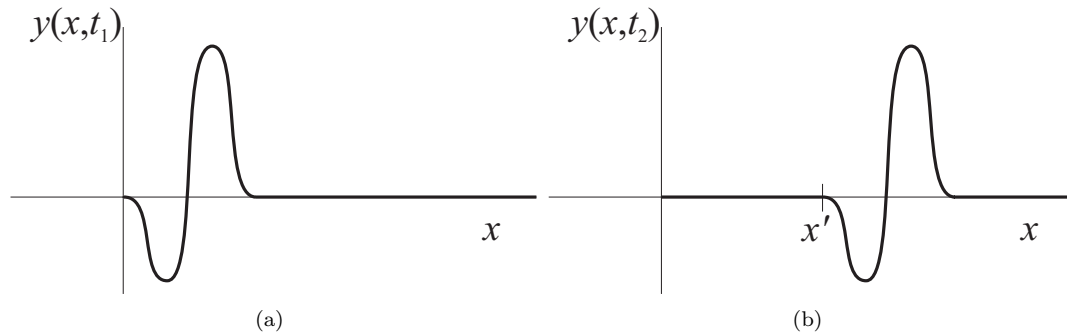


Figura 2: Variación de altura de los puntos de una cuerda en: (a) el instante t_1 (la onda termina de pasar por el origen), (b) en el instante t_2 (la onda termina de pasar por x').

La deducción se ha hecho para una onda en una cuerda por simplicidad, pero es válida para una onda cualquiera en la cual una perturbación de una magnitud física ψ (que puede ser posición, temperatura, presión, etc.) se propaga únicamente a lo largo de la dirección x sin deformarse ni atenuarse. En este caso, la magnitud ψ en el punto x varía en función del tiempo como:

$$\psi(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (2)$$

donde la función $g(\cdot)$ puede tener cualquier forma continua. La onda es la función $\psi(x, t)$, es decir, una expresión de la magnitud física ψ en función del tiempo y el espacio. La dependencia con $t - \frac{x}{c}$ es lo característico de las ondas planas, no la forma en sí de la función $g(\cdot)$.

Para demostrar que una onda que no se deforma tiene una dependencia con $t - \frac{x}{c}$ se ha supuesto que la onda unidimensional se desplaza de izquierda a derecha, por lo que al aumentar x el tiempo que se tarda en llegar al punto aumenta. Sin embargo, se podría haber supuesto que la onda se desplaza de derecha a izquierda, de forma que a medida que disminuye x el tiempo que se tarda en llegar a esos puntos aumenta, siendo este tiempo $-\frac{x}{c}$. Así, para una onda desplazándose hacia la izquierda se cumplirá:

$$\psi(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad (3)$$

2.2. Ecuación de una onda plana

En la ecuación (2) se observa que una onda plana desplazándose hacia la derecha tiene una dependencia muy característica con el tiempo y el espacio: la dependencia $t - \frac{x}{c}$. Esta dependencia hace que todas las ondas planas, que tengan la forma $g(\cdot)$, cumplan una ecuación diferencial que se conoce como *ecuación de onda plana*. Esta ecuación diferencial es:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

Demostración: Para encontrar esta ecuación, primero utilizamos una nueva variable $u = t - \frac{x}{c}$, y luego calculamos las derivadas parciales segundas de la onda con respecto al tiempo y al espacio. Calculamos la derivada parcial con respecto al tiempo y quedaría, haciendo uso de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{d g(u)}{d u}$$

Volvemos a derivar con respecto a x para obtener la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g(u)}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 g(u)}{du^2}$$

Ahora hacemos la parcial con respecto al tiempo

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{dg(u)}{du}$$

Y volvemos a derivar con respecto al tiempo para obtener la derivada segunda:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right) \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g(u)}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{d^2 g(u)}{du^2}$$

Si se comparan las expresiones de las dos derivadas segundas se obtiene la ecuación (4). ■

La ecuación (4) es una ecuación diferencial en derivadas parciales que se conoce como *ecuación de onda plana*. Se puede ver fácilmente que una onda que se desplace hacia la izquierda (3) también cumple la ecuación (4).

Según la teoría de ecuaciones diferenciales, la forma más genérica de una función $\psi(x, t)$ que satisfaga la ecuación de onda se puede escribir como una suma de una onda desplazándose hacia la derecha y otra hacia la izquierda:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} \iff \psi(x, t) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

para algunas funciones $g_1(\cdot)$ y $g_2(\cdot)$ que dependerán de las condiciones iniciales y de las condiciones de contorno.

2.3. Ondas armónicas

Hasta ahora, una onda plana propagándose hacia la derecha podía tener cualquier forma $g(\cdot)$, con tal de que presentara una dependencia con el tiempo como la que aparece en (2). En este apartado nos vamos a centrar en el caso en el que la perturbación es *armónica* (de tipo seno o coseno) y estudiaremos las propiedades que presentarán estas ondas, que se denominan *ondas armónicas*.

Como vamos a suponer que la forma de la onda es armónica la función $g(\cdot)$ será un seno y la onda quedaría:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right) \quad (5)$$

donde A es la amplitud de la onda, ω su frecuencia angular y φ_0 la fase inicial que dependerá de cuándo se toma el origen de tiempos.

Si la magnitud que se propaga es variación de posición, por ejemplo la coordenada y de los puntos de una cuerda tensa, se puede observar en (5) cómo un punto situado en x se moverá siguiendo un movimiento armónico simple (de ahí porqué se ha llamado a ω frecuencia angular), y podemos aplicar todo lo que vimos en el Tema 2 en el estudio de este movimiento.

Si se tiene en cuenta que $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en (5), con T el periodo, se tiene:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right) = A \operatorname{sen} \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{Tc} \right) + \varphi_0 \right)$$

El producto Tc que está dividiendo la variable x es el producto de una velocidad por un tiempo, lo que tiene dimensiones de espacio. Como T es el periodo de una oscilación y c es la velocidad

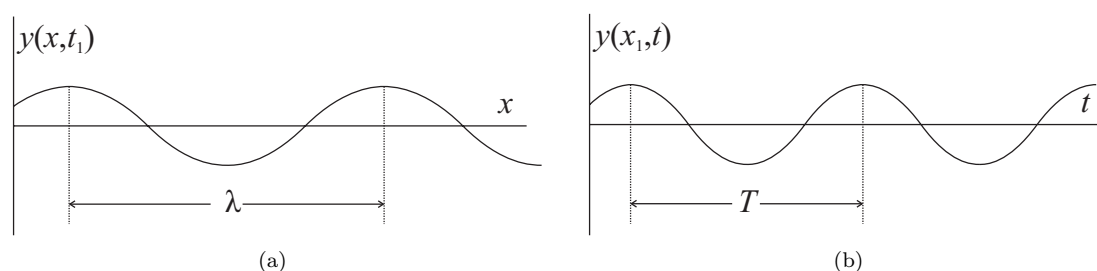


Figura 3: Onda armónica en una cuerda en función: (a) de la posición para un instante t_1 , (b) del tiempo para una posición x_1 .

de la onda, el producto representa el espacio que recorre la onda en el intervalo de tiempo que dura una oscilación (un periodo). Este espacio se conoce como *longitud de onda* y se nota con letra griega λ . Así la definición de longitud de onda es:

$$\lambda = Tc$$

y con esta definición la onda armónica queda:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right) \quad (6)$$

Se puede observar en la ecuación (6) que una onda armónica posee doble periodicidad, una en el tiempo y otra en el espacio. Así, para un mismo punto del espacio, la función se repite cada vez que el tiempo t aumenta un tiempo T , y por otro lado, para una mismo instante temporal, la función se repite cada vez que nos movemos en el espacio una distancia λ . Esto queda reflejado en las figuras 3(a) y 3(b). En la primera se representa la onda en función de la posición para un instante t_1 y puede verse cómo la forma de la onda se repite cada distancia λ ; mientras que la segunda representa la onda en función del tiempo para una posición fija x_1 y se observa que la onda se repite cada tiempo T .

Aparte de la longitud de onda, se define el *número de onda*, k , como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

que es una función que juega el mismo papel en el espacio que ω en el tiempo, y se mide en el sistema internacional en m^{-1} . Haciendo uso de esta magnitud, la ecuación (6) queda de forma más compacta:

$$\psi(x, t) = A \operatorname{sen} (\omega t - kx + \varphi_0) \quad (7)$$

Esta expresión para ondas armónica es la que se encuentra más frecuentemente en los textos.

2.4. Ejemplos

A continuación se estudiaron dos situaciones prácticas haciendo uso de las herramientas que hemos desarrollado durante nuestro estudio de la mecánica en temas anteriores. Se obtendrán en ambos casos que la perturbación mecánica se propagará como una onda plana.

2.4.1. Ondas transversales en una cuerda sometida a tensión

Se considera una cuerda sometida a una tensión T en la dirección horizontal. En esta situación, si se desprecia la acción del peso, la posición de equilibrio de la cuerda es una línea horizontal, $y = 0$ para todo x , de forma que sobre cualquier trozo “pequeño” de cuerda actúan dos tensiones horizontales, de igual módulo, misma dirección y sentido contrario. Por tanto, la tensión T es constante a lo largo de la cuerda inextensible en equilibrio. Si se desplaza un punto de la cuerda respecto su posición de equilibrio, dotándolo de una altura $y \neq 0$, este punto arrastrará en su movimiento a los puntos colindantes, ya que la cuerda es inextensible, los que a su vez arrastrarán a sus puntos vecinos y así sucesivamente. De esta forma, debido a las propiedades elásticas de la cuerda, el movimiento del punto inicial se propaga a otros puntos de la cuerda. Esta propagación de la perturbación de una propiedad física (altura y) a través del espacio es lo que hemos definido como una onda.

Como ya hemos apuntado anteriormente, los puntos de la cuerda se moverán, bajo determinadas circunstancias, siguiendo la ecuación (4), lo que implica que la variación de altura de cualquier punto se propaga como una onda plana. La velocidad de la onda es en este caso:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} \quad (8)$$

donde ρ_l es la densidad lineal de la cuerda.

Hay que tener claro que la velocidad de la que se habla en (8) es la velocidad de la **onda**, es decir, de la perturbación, pero no la velocidad de los puntos de la cuerda. Como hemos visto que la perturbación se propaga como una onda plana, si esta perturbación es armónica, la onda responderá a una ecuación:

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$$

Esto implica que cada punto de la cuerda se moverá según un movimiento armónico simple, por lo que el punto x de la cuerda llevará una velocidad que será función del tiempo:

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(\omega t - kx)$$

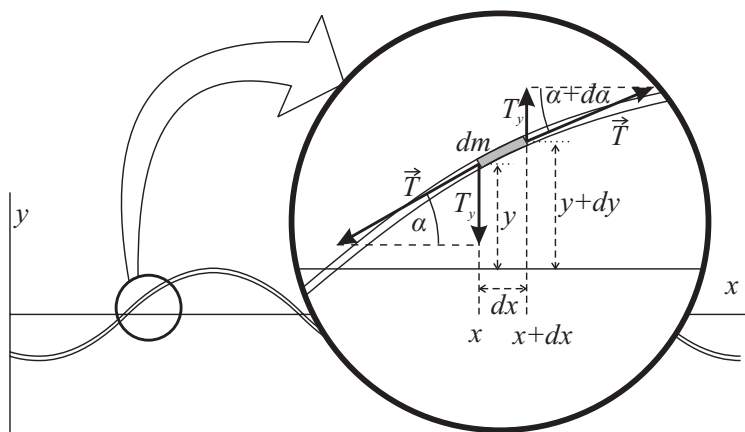
Demostración: Para demostrar que los puntos de la cuerda se mueven según la ecuación (4) hay que estudiar las fuerzas que actúan sobre un trozo “pequeño” de cuerda. En la Figura 4 se esquematiza uno de estos trozos, de longitud dx y masa dm , junto con el esquema de fuerzas y las distintas variables a considerar.

Despreciando la gravedad, las fuerzas que actúan sobre el trozo de cuerda son dos tensiones \vec{T} que actúan a ambos extremos del trozo. Suponemos que la cuerda es lineal (unidimensional), homogénea y que el módulo de la tensión es constante a lo largo de la cuerda. Sin embargo, la dirección de la tensión no es igual a lo largo de la cuerda, ya que va cambiando con la curvatura de la misma. Este hecho queda recogido en la Figura 4. En la dirección vertical, la resultante de las fuerzas será igual a la masa por la aceleración en esa dirección, es decir:

$$T \operatorname{sen}(\alpha + d\alpha) - T \operatorname{sen}(\alpha) = dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (9)$$

Si las oscilaciones son pequeñas $\operatorname{sen} \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, donde las tangentes de los ángulos α y $\alpha + d\alpha$ son las pendientes de las rectas tangentes a la altura de la cuerda en los puntos x y $x + dx$. Por definición, la pendiente es la derivada de la altura y con respecto de x en cada punto, lo que junto a la aproximación de pequeñas oscilaciones implica

$$\operatorname{sen}(\alpha + d\alpha) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} ; \operatorname{sen}(\alpha) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \quad (10)$$


 Figura 4: Esquema de fuerzas sobre un trozo dm de cuerda.

Teniendo en cuenta que la cuerda es fina y homogénea se tiene $dm = \rho_l dx$, donde ρ_l es la densidad lineal de la cuerda (masa por unidad de longitud). Sustituyendo este resultado y (10) en (9), queda:

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial x}|_{x+dx} - \frac{\partial y}{\partial x}|_x}{dx} = \frac{\rho_l}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Si se define $g(x) = \frac{\partial y}{\partial x}$, es fácil ver que el primer término de la igualdad corresponde con $\frac{\partial g}{\partial x}$, es decir, la segunda derivada parcial de y con respecto a x , lo que resulta:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho_l}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

Comparando esta ecuación con (4) se puede ver que la velocidad de onda es la dada en (8), que como se anticipó es el cociente entre una propiedad elástica (recuperación del sistema) y una propiedad inercial (masa del sistema). ■

2.4.2. Ondas longitudinales en un fluido

Imaginemos un pequeño trozo de fluido de longitud dx , superficie S , tal y como se muestra en la Figura 5(a), de forma que la parte izquierda del volumen se encuentra en la posición x y la parte derecha en $x + dx$. El volumen del trozo es por tanto $V_0 = Sdx$. Cuando por este trozo de fluido pasa una onda longitudinal, el trozo se moverá y se estirará o contraerá. Un instante posterior, cuando está pasando la onda, el mismo trozo se encuentra en una situación como la que se muestra en la Figura 5(b), donde se observa que la parte izquierda se encuentra en $x + \varepsilon$ y la parte derecha en $x + dx + \varepsilon + d\varepsilon$. Por tanto, el volumen del trozo de fluido pasa a ser $V_f = S(dx + d\varepsilon)$. La magnitud ε es lo que se desplaza cada parte del fluido, por tanto depende de la posición x que se considere.

Este desplazamiento ε de los trozos del fluido será función de x y de t y cumple la ecuación de onda plana (4), con una velocidad:

$$c = \sqrt{\frac{\mathcal{K}}{\rho_v}} \quad (11)$$

donde \mathcal{K} es el módulo de compresibilidad (cómo varía la presión al variar el volumen) y ρ_v es la densidad del fluido.

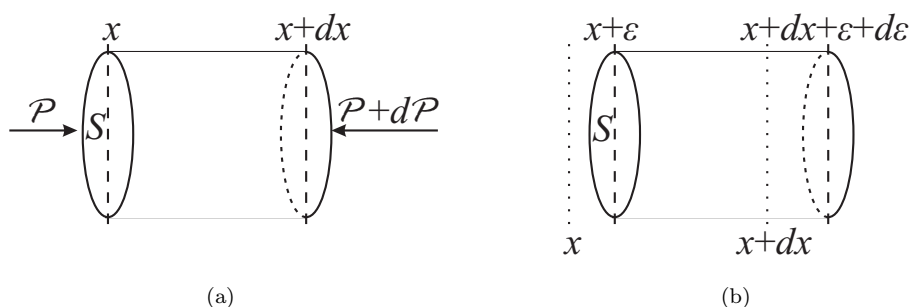


Figura 5: Esquema de un trozo de fluido en dos instantes sucesivos (a) y (b).

Demostración: Debido al paso de la onda que se recoge en la Figura 5, el trozo de fluido que estamos considerando sufrirá una variación de volumen que será:

$$\Delta V = V_f - V_0 = Sd\epsilon$$

Al variar el volumen del trozo de fluido, se producirá también una variación de la presión que hay dentro. La presión en equilibrio (si no hubiese onda) sería \mathcal{P}_0 y debido a la onda se produce una variación de la presión $\Delta\mathcal{P}$. La variación de presión $\Delta\mathcal{P}$ y la variación de volumen ΔV se relacionan para oscilaciones rápidas a través del módulo de compresibilidad \mathcal{K} , que se define como

$$\mathcal{K} = -V \frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta V}$$

Con esto, la variación de volumen específica queda:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\mathcal{K}} \Delta\mathcal{P}$$

Por otro lado:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{Sd\epsilon}{Sdx} = \frac{\partial\epsilon}{\partial x}$$

En el último paso se ha tenido en cuenta que $d\epsilon$ es la variación de la magnitud ϵ al pasar de x a $x+dx$ en un determinado instante (manteniendo en tiempo constante), por lo que el cociente $d\epsilon/dx$ es la derivada parcial.

Si se tienen en cuenta las dos últimas expresiones, la variación de presión $\Delta\mathcal{P}$ debido a la variación de volumen se puede relacionar con cómo varía ϵ al desplazarnos en x de la forma:

$$\Delta\mathcal{P} = -\mathcal{K} \frac{\partial\epsilon}{\partial x} \quad (12)$$

Por otro lado, se puede aplicar la segunda ley de Newton al “pequeño” trozo de fluido, de masa dm . Siguiendo el esquema de este trozo que aparece en la Figura 5(a), por la izquierda se ejerce una fuerza hacia la derecha que será $\mathcal{P}S$, mientras que en la cara de la derecha se ejercerá una fuerza hacia la izquierda que será $-(\mathcal{P}+d\mathcal{P})S$, donde $d\mathcal{P}$ es la variación que experimenta la presión \mathcal{P} al desplazarnos en x manteniendo el tiempo fijo. Estas presiones se representa para un instante en la Figura 5(a). Así, la segunda ley de Newton quedará (despreciando el peso)

$$\mathcal{P}S - (\mathcal{P} + d\mathcal{P})S = dm \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \Rightarrow -d\mathcal{P}S = \rho_v S dx \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} \Rightarrow -d\mathcal{P} = \rho_v dx \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2}$$

donde en el segundo paso se ha utilizado que la masa dm del trozo se puede expresar como $dm = \rho_v S dx$.

Si dx se pasa al primer miembro y se tiene en cuenta que las variaciones de presión se están produciendo por variaciones de x pero manteniendo el tiempo fijo, la ecuación anterior queda:

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \rho_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

Ahora bien, en la ecuación (12) nos dice que la variación de \mathcal{P} es igual a menos \mathcal{K} por la derivada parcial de ε con respecto a x , por lo que $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x}$, que es la variación de \mathcal{P} al variar x manteniendo el tiempo constante, será igual a menos \mathcal{K} por la parcial segunda de ε con respecto a x . Así se tiene:

$$-\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = \mathcal{K} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \rho_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

Despejando se obtiene finalmente:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{\frac{\mathcal{K}}{\rho_v}} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$$

que resulta ser una ecuación de onda (4) con la velocidad dada en (11). ■

Como para cualquier onda plana, si la perturbación que da lugar a la onda es armónica con frecuencia ω , el movimiento que sufren las partículas del medio es:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \text{sen}(\omega t - kx) \quad (13)$$

donde ε_0 es la amplitud del movimiento, $k = \frac{\omega}{c}$ y con c la obtenida en la expresión (11).

En este caso es muy fácil obtener la expresión de la variación de presión (también llamada sobrepresión) $\Delta \mathcal{P}$ teniendo en cuenta (12) y (13):

$$\Delta \mathcal{P} = -\mathcal{K} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \mathcal{K} k \cos(\omega t - kx)$$

Como $\mathcal{K} = c^2 \rho_v$ y $k = \frac{\omega}{c}$ se tiene:

$$\Delta \mathcal{P} = c \rho_v \omega \varepsilon_0 \cos(\omega t - kx) \quad (14)$$

Es decir, la sobrepresión $\Delta \mathcal{P}$ se propagará como una onda plana armónica, con la misma velocidad y misma frecuencia que la onda de desplazamiento (13) pero con distinta amplitud $\Delta \mathcal{P}_0$. Esta amplitud de sobrepresión y la amplitud de desplazamiento ε_0 se relacionan mediante la ecuación:

$$\Delta \mathcal{P}_0 = c \rho_v \omega \varepsilon_0 \quad (15)$$

Las ondas acústicas son ondas longitudinales que se pueden propagar en sólidos o en fluidos, luego se puede aplicar todo lo que se ha visto en este ejemplo a ondas acústicas.

Por ondas acústicas se entienden generalmente las ondas longitudinales que son percibibles por el oído humano. Esto implica un determinado intervalo tanto en frecuencia como en amplitud.

Por un lado, el oído humano es capaz de percibir frecuencias en un intervalo entre 20 Hz y 20.000 Hz. Las ondas con frecuencias menores de 20 Hz se llaman infrasonicas y las de frecuencias superiores a 20.000 Hz se conocen como ultrasónicas. Para otros animales el intervalo de frecuencias que pueden percibir varía. Por ejemplo, el perro percibe hasta 38 kHz y la rata hasta 72 kHz.

Por otro lado, existe un rango de amplitudes que pueden percibirse por el oído humano, pero esta amplitud depende de la frecuencia. Normalmente se suele trabajar con el rango de amplitud que el oído humano presenta a una frecuencia de 1 kHz, que para una ε_0 de entre $8 \cdot 10^{-12}$ m hasta $11 \cdot 10^{-6}$ m, lo que implica un rango en $\Delta \mathcal{P}_0$ de entre $2 \cdot 10^{-5}$ Pa hasta 28 Pa. Como puede verse, los valores de la amplitud de desplazamientos son muy pequeños (el radio atómico típico es del orden de 10^{-10} m), por lo que no se suele trabajar con desplazamientos, sino con presiones, y las ondas sonoras suelen tratarse habitualmente como ondas de presión que como ondas de desplazamiento.

3. Energía de una onda, intensidad y absorción

En este apartado se estudiarán aspectos energéticos de las ondas armónicas, como son la potencia, la intensidad y la absorción.

3.1. Potencia de una onda

Para una onda armónica plana de amplitud A , frecuencia angular ω y velocidad c que incide sobre un medio de densidad ρ_v y superficie transversal a la propagación de la onda S , la potencia de la onda que se propaga es:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho_v S \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}A^2\omega^2\rho_v Sc \quad (16)$$

Demostración: Se estudió en el tema anterior que la energía de un oscilador armónico, de masa m y que se mueve con amplitud A y frecuencia angular ω era:

$$E = \frac{1}{2}A^2\omega^2 m$$

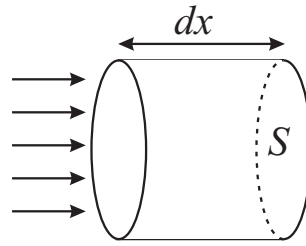


Figura 6: Onda pasando por un trozo de medio.

Si tenemos una onda mecánica armónica, los distintos partes del medio se moverán al pasar la onda como un oscilador armónico, con la amplitud y la frecuencia de dicte la onda. Si tomamos un trozo “pequeño” de medio, de masa dm , superficie S y longitud dx en la misma dirección en la que pasa la onda, como se muestra en la Figura 6, se tiene $dm = \rho_v S dx$, donde ρ_v es la densidad volúmica. Por analogía con lo que sucede con un oscilador armónico, la energía de esta porción de medio que se moverá siguiendo un movimiento armónico será:

$$dE = \frac{1}{2}A^2\omega^2 dm = \frac{1}{2}A^2\omega^2 \rho_v S dx$$

donde la energía es diferencial porque el trozo de medio tiene una masa diferencial.

La energía del trozo de medio se debe a la onda que lo atraviesa, por lo que la potencia que lo atraviesa debida a la onda será igual al cociente entre la energía que entra en el trozo durante un pequeño tiempo y este pequeño intervalo de tiempo:

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}A^2\omega^2 \rho_v S \frac{dx}{dt}$$

lo que es igual a la ecuación (16). ■

La expresión (16) es general para cualquier onda mecánica armónica propagándose por un medio extenso. A continuación se particulariza para las situaciones que se han venido estudiando.

Ejemplo 1: Para una onda propagándose por una cuerda, la masa de un trozo pequeño de cuerda será $dm = \rho_l dx$ con lo que la potencia que atraviesa el pequeño trozo será:

$$P = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho_l c$$

Ejemplo 2: Para una onda sonora, la potencia se puede expresar en función de la amplitud de desplazamiento ε_0 y de la amplitud de sobrepresión $\Delta \mathcal{P}_0$, sin más que sustituir la relación (15):

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \rho_v S c = \frac{1}{2} \frac{\Delta \mathcal{P}_0^2 S}{\rho_v c}$$

En esta expresión (16) se observa cómo la potencia depende de la superficie que se considere. La potencia total de una onda será la que se distribuya a través de todo su frente de onda.

Si el medio no absorbe energía, la potencia P_1 que en un determinado instante se distribuye por un frente de onda tiene que ser igual a la potencia P_2 que se distribuye por el frente de onda cuando este haya viajado durante cierto tiempo. Este resultado no es otro que la conservación de la energía y significa:

$$P_1 = P_2 \implies \frac{1}{2} A_1^2 \omega^2 \rho_v S_1 c = \frac{1}{2} A_2^2 \omega^2 \rho_v S_2 c$$

La frecuencia de la onda depende de la perturbación inicial, por lo que no varía, como tampoco lo hacen ρ_v y c si el medio es homogéneo. Por tanto se puede simplificar y quedaría que la conservación de la energía implica:

$$A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2 \tag{17}$$

Por ejemplo, si tenemos una onda plana, los frentes de onda son iguales a medida que se propaga la onda, por lo que $S_1 = S_2$ para cualesquiera dos puntos o instantes, y por tanto tenemos que $A_1 = A_2$. Es decir, la amplitud de una onda plana que se propaga en un medio sin absorción permanece constante a lo largo de la propagación.

Ejemplo 3: Sin embargo, si la onda es una onda esférica, en un determinado instante un frente de onda se encuentra a una distancia r_1 del origen y tendrá una amplitud A_1 . La energía que se encuentra en ese instante en ese frente de onda se propagará, y tras pasar cierto tiempo se encontrará a una distancia r_2 mayor y tendrá una amplitud A_2 . Como la energía total que se distribuye a lo largo de toda la superficie de los frentes de onda debe ser la misma, se debe cumplir la ecuación (17), y para ondas esféricas queda:

$$A_1^2 S_1 = A_2^2 S_2 \implies A_1^2 4\pi r_1^2 = A_2^2 4\pi r_2^2 \implies A_1^2 r_1^2 = A_2^2 r_2^2 \implies A_1 r_1 = A_2 r_2$$

por tanto el producto de amplitud por distancia al origen permanece constante, que podemos llamar B . Por tanto

$$A_1 r_1 = A_2 r_2 = B \implies A_1 = \frac{B}{r_1} \text{ y } A_2 = \frac{B}{r_2}$$

En general, la amplitud decrecerá al crecer la distancia r al origen de la onda, y la dependencia explícita es:

$$A(r) = \frac{B}{r}$$

donde B es una constante. Por tanto, una onda esférica armónica que se propaga por un medio sin pérdidas sería:

$$\psi(r, t) = \frac{B}{r} \text{sen}(\omega t - kr + \varphi_0)$$

El signo menos delante de kr indica que la onda sale del origen hacia afuera, mientras que si la onda se dirige hacia el origen debería ser un signo más.

Ejemplo 4: Lo mismo que se ha hecho con ondas planas y esféricas se puede hacer para otras geometrías al frente de onda, aplicar conservación de energía mediante (17) para las superficies correspondientes y obtener una relación de cómo varía la amplitud al propagarse la onda. Si esto se hace para una onda circular (ondas en la superficie del agua, por ejemplo) se obtendría

$$A(r) = \frac{B}{\sqrt{r}}$$

y la onda quedaría

$$\psi(r, t) = \frac{B}{\sqrt{r}} \text{sen}(\omega t - kr + \varphi_0)$$

3.2. Intensidad de una onda

Se ha estudiado la expresión de la potencia de una onda, resultando en la ecuación (16) que indica la energía por unidad de tiempo que se distribuye por una determinada superficie de un frente de onda. Pero la potencia tiene el inconveniente de que depende de la superficie considerada, lo que no proporciona una buena idea de la distribución energética. Por ejemplo, si se colocan dos detectores que midan potencia en el mismo punto, pero cuyos sensores tengan superficies distintas, la potencia que medirán será distinta.

Es mucho más conveniente en numerosas aplicaciones trabajar con el cociente entre potencia y superficie, que se conoce como *intensidad* y para una onda armónica general quedaría:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho_v c \quad (18)$$

Ejemplo 1: En el caso de una onda sonora, la intensidad se puede expresar en función de la amplitud de desplazamiento ε_0 o de la amplitud de sobrepresión $\Delta\mathcal{P}_0$ como:

$$I = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 \omega^2 \rho_v c = \frac{1}{2} \frac{\Delta\mathcal{P}_0^2}{\rho_v c}$$

Una onda sonora armónica de frecuencia 1000 Hz produce una sensación sonora para intensidades mayores de 10^{-12} W/m², lo que se conoce como umbral de audición. Para intensidades mayores de 1 W/m² la sensación es dolorosa y puede producir daños en el oído, por lo que el intervalo de intensidades audibles a una frecuencia de 1 kHz sería $[10^{-12}, 1]$ W/m², lo que se puede ver que es un intervalo amplísimo. Para otras frecuencias los márgenes de intensidades audibles variarán, sobre todo el umbral de audición, ya que el oído humano responde de forma diferente a distintas frecuencias.

Al igual que se pudo relacionar cómo varía la amplitud durante la propagación de la onda en función del área del frente de onda en el caso de que no haya pérdida de energía, lo mismo se puede hacer con la intensidad, sin más que tener en cuenta la relación entre potencia, intensidad y área:

$$P_1 = P_2 \Rightarrow I_1 S_1 = I_2 S_2 \Rightarrow I_1 = \frac{S_2}{S_1} I_2$$

Así, para dos puntos de una onda plana sin pérdida, las intensidades estarán relacionadas como:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow I_1 = I_2$$

lo que también se puede obtener viendo que la amplitud permanece constante.

Ejemplo 2: En una onda esférica, $S_2/S_1 = r_2^2/r_1^2$ por lo que la intensidad decae con el cuadrado de la distancia. Esto también se puede observar a través de la amplitud (17) que decae como la inversa de la distancia a la fuente, por lo que la intensidad decaerá como:

$$I(r) = \frac{B}{r^2}$$

donde B es una constante.

Esto mismo se puede realizar para otras geometrías en el frente de onda, obteniendo primero la variación de la amplitud durante la propagación y luego, de forma sencilla, la de la intensidad.

3.3. Absorción

Hasta ahora se ha supuesto que las ondas se propagan por el medio sin ningún tipo de pérdidas, de forma que la potencia a lo largo de todo un frente de onda permanece constante en la propagación. Sin embargo, en general, el medio siempre absorbe algo de energía de la onda, aunque esta absorción puede ser en muchos casos despreciable.

Si una onda incide sobre un medio con una intensidad I , la absorción que se produce en el medio cuando la onda recorre una distancia dx es proporcional a la intensidad de la onda y a la distancia recorrida. La intensidad absorbida durante la propagación es lo que disminuye la intensidad de la onda, es decir, su variación dI . Esta variación se encuentra experimentalmente que es proporcional a la intensidad de entrada I y al espacio recorrido dx , de forma que se tiene:

$$dI = -\beta I dx$$

donde la constante de proporcionalidad β se conoce como *coeficiente de absorción* y el signo menos se debe a que la intensidad de la onda disminuye a medida que viaja en el medio. La anterior ecuación se puede integrar y resulta que la intensidad en función de la distancia de propagación de una onda plana, donde I_0 sería la intensidad de entrada ($x = 0$), quedaría:

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

El coeficiente de absorción será una propiedad del medio en el que se propaga la onda y en general dependerá de la frecuencia, aumentado normalmente a medida que la frecuencia aumenta.

Ejemplo 1: Siempre y cuando la absorción sea pequeña, se puede encontrar una expresión de la intensidad en presencia de absorción para ondas no planas. Para ondas esféricas la expresión quedaría:

$$I = \frac{B}{r^2} e^{-\beta r}$$

Una vez que se tiene cómo varía la intensidad, se puede obtener cómo varía la amplitud sin más que aplicar la raíz cuadrada a la intensidad.

4. Fenómenos ondulatorios

Las ondas presentan ciertos fenómenos muy característicos, algunos generales a todas las ondas, otros propios sólo de cierto tipo de ellas, algunos de los cuales pasamos a estudiar a continuación.

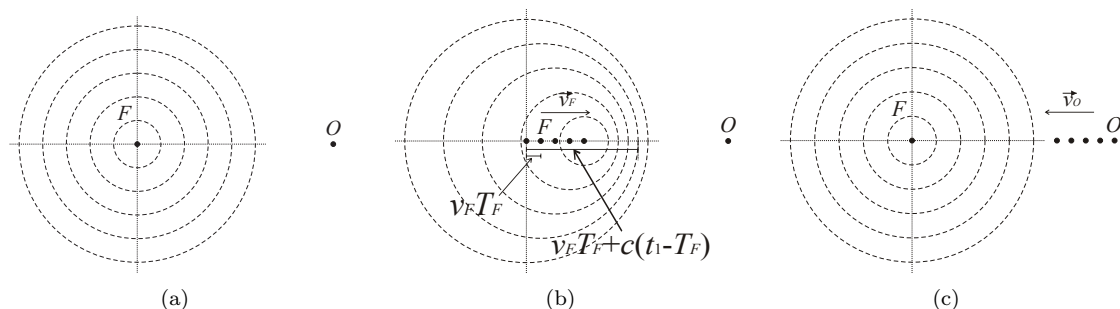


Figura 7: Ondas emitidas por un foco F y recibidas por un observador O en los casos: a) foco y observador fijos; b) foco moviéndose con velocidad \vec{v}_F y observador fijo; c) foco fijo y observador moviéndose con velocidad \vec{v}_O .

4.1. Efecto Doppler

Este efecto ocurre en situaciones en las que el foco o el observador de una onda se mueven, y consiste en una variación en la frecuencia percibida, que será distinta de la frecuencia emitida.

Si tanto el foco F como el observador O permanecen fijos, la frecuencia que percibe el observador será igual a la frecuencia que emite el foco, como cabría esperar. Esto se observa en la Figura 7(a), en la que se observa cómo el ritmo al cual el foco F emite ondas es igual al ritmo al cual el observador O recibe las ondas. Pero si el foco se mueve con una velocidad \vec{v}_F y/o el observador se mueve con velocidad \vec{v}_O , la frecuencia que perciba el observador, f_O , será distinta de la que emita el foco, f_F , lo que se puede observar en las figuras 7(b) y 7(c). En general, si tanto el foco como el observador se mueven en la misma dirección la relación entre f_O y f_F será:

$$f_O = \frac{c \pm v_O}{c \pm v_F} f_F \quad (19)$$

donde c es la velocidad de la onda (con respecto al medio) y en el numerador el signo es “+” si el observador se mueve hacia el foco y “-” si se aleja, mientras que en denominador el signo menos ocurre cuando el foco se mueve hacia el foco y más si se aleja. Suele resultar más fácil saber que f_O aumenta cuando uno va hacia otro y disminuye en caso contrario y elegir los signos en función de esto.

Demostración: Para demostrar la expresión (19), se demostrarán dos casos por separado: primero cuando el foco se mueve y el observador permanece fijo, y posteriormente se demostrará el caso opuesto. Finalmente se demostrará cuando ambos, foco y observador, se mueven.

En el caso de que el foco se mueva hacia el observador a una velocidad v_F la frecuencia observada será distinta de la emitida. Imaginemos un frente de onda que se emitió en $t = 0$ cuando el foco estaba en el origen. Cuando haya transcurrido un tiempo $t = t_1$, el frente de onda se encontrará en una esfera de radio $x_1 = ct_1$. En la Figura 7(b), se dibuja precisamente este instante $t = t_1$ donde la onda que se emitió en $t = 0$ corresponde con la esfera más grande. El siguiente frente de onda (que será la segunda esfera más grande en la Figura 7(b)) se emitió en el instante $t = T_F$, donde T_F es el periodo con que emite el foco. Si el foco no se moviera, este segundo frente de onda se encontraría a una distancia $c(t_1 - T_F)$ del origen, y la distancia entre los dos frentes de onda sería cT_F . Sin embargo, si el foco se mueve hacia la derecha, el segundo frente de onda no se emitió en el origen, sino a una distancia $v_F T_F$ a la derecha del origen, por lo que dicho frente a la derecha del

origen se encuentra a una distancia $x_2 = v_F T_F + c(t_1 - T_F)$. Estas dos últimas distancias están señaladas en la Figura 7(b). La distancia entre dos frentes de onda consecutivos a lo largo de la dirección en la que se propaga el foco será:

$$x_1 - x_2 = ct_1 - (v_F T_F + c(t_1 - T_F)) = T_F(c - v_F)$$

Pero la distancia entre dos máximos (o mínimos) consecutivos es la longitud de onda, de forma que esta distancia será la longitud de onda que percibe el observador, λ_O :

$$\lambda_O = T_F(c - v_F)$$

que es menor que la longitud de onda que emitiría el foco si estuviese quieto $\lambda_F = cT_F$, como puede verse si se comparan las figuras 7(a) y 7(b). Como el observador ve que la onda se propaga a una velocidad c , la frecuencia que percibe un observador, f_O , hacia el cual se dirige el foco (a la derecha en la Figura 7(b)) será:

$$f_O = \frac{c}{\lambda_O} = \frac{c}{T_F(c - v_F)} = \frac{c}{c - v_F} f_F$$

Si el foco se estuviese moviendo en dirección contraria, de forma que el foco se aleja del observador (a la izquierda en la Figura 7(b), el segundo frente de onda se emitiría a una distancia de $T_F c$ a la izquierda del origen, y el frente de onda se encontraría a la derecha del origen en una posición $x_2 = -v_F T_F + c(t_1 - T_F)$. Por tanto, visto desde la derecha, la distancia entre dos frentes de ondas sería:

$$x_1 - x_2 = ct_1 - (-v_F T_F + c(t_1 - T_F)) = T_F(c + v_F)$$

que es mayor que la longitud de onda que emitiría el foco quieto, como también puede verse si se comparan las figuras 7(a) y 7(b). Esto produce que la frecuencia observa un observador que ve alejarse al foco sería:

$$f_O = \frac{c}{c + v_F} f_F$$

Las dos situaciones se pueden agrupar en una única ecuación, de forma que cuando el foco se mueve, la frecuencia que recibe un observador será:

$$f_O = \frac{c}{c \pm v_F} f_F \quad (20)$$

donde el signo será “-” cuando el foco vaya hacia el observador y el signo será “+” en caso contrario.

Se ha estudiado cómo varía la frecuencia cuando se mueve el foco, queda por estudiar qué sucede cuando el que se mueve es el observador, lo que está esquematizado en la Figura 7(c). En este caso, la distancia entre frentes de ondas, al estar el foco fijo, es siempre $\lambda_F = c/f_F$.

Si el observador se mueve hacia la onda, éste ve que la onda no tiene una velocidad c , sino una velocidad $c + v_O$, donde v_O es la velocidad del observador. Por lo que aunque la longitud de onda sea igual a la longitud de onda que emite el foco, la frecuencia variará. Concretamente, la frecuencia que recibe un observador que se mueve hacia el foco será:

$$f_O = \frac{c + v_O}{\lambda_F} = \frac{c + v_O}{c} f_F$$

Si el observador se hubiese movido en la misma dirección que la onda, alejándose del foco, en este caso la velocidad relativa sería $c - v_O$. Esto provoca que la frecuencia que percibe el observador sea:

$$f_O = \frac{c - v_O}{\lambda_F} = \frac{c - v_O}{c} f_F$$

Al igual que en el caso anterior, las dos últimas ecuaciones se pueden concretar en una sola que describe la frecuencia que percibe un observador en movimiento, cuando el foco está fijo:

$$f_O = \frac{c \pm v_O}{c} f_F \quad (21)$$

donde en este caso el signo “-” corresponde a la situación en la que el observador se aleja del foco y el signo “+” en caso contrario.

Cuando tanto el observador como el foco se mueven, la frecuencia que ve el observador se puede obtener uniendo las dos ecuaciones (20) y (21), produciendo la ecuación (19). ■

En general, tanto el foco como el observador no se tienen que mover siempre en la dirección que los une, sino que pueden hacerlo en cualquier otra dirección. En el caso más general, si \hat{u} es un versor en la dirección que une el foco y el observador y con sentido desde el foco al observador, la frecuencia que observa el observador y la frecuencia a la que emite el foco se relacionan mediante la expresión genérica:

$$\frac{f_O}{c - \hat{u} \cdot \vec{v}_O} = \frac{f_F}{c - \hat{u} \cdot \vec{v}_F}$$

Este tratamiento que hemos hecho para el efecto Doppler es válido para el caso de ondas mecánicas, pero no es válido para el caso de ondas electromagnéticas, por lo menos no completamente. La parte correspondiente al caso en el que el foco se mueve sí es correcta, pero en el caso en el que el observador se mueve no lo sería. En ese caso habría que recurrir a la teoría de la relatividad especial de Einstein para estudiar cuál sería la frecuencia que se observa. Este tratamiento está fuera de los objetivos del tema, de forma que sólo diremos que para ondas electromagnéticas, la frecuencia observada queda:

$$f_O = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c - \hat{u} \cdot \vec{v}} f_F$$

donde \vec{v} es la velocidad *relativa* entre el foco y el observador, lo que implica que da igual quién se mueva.

4.2. Onda de Mach

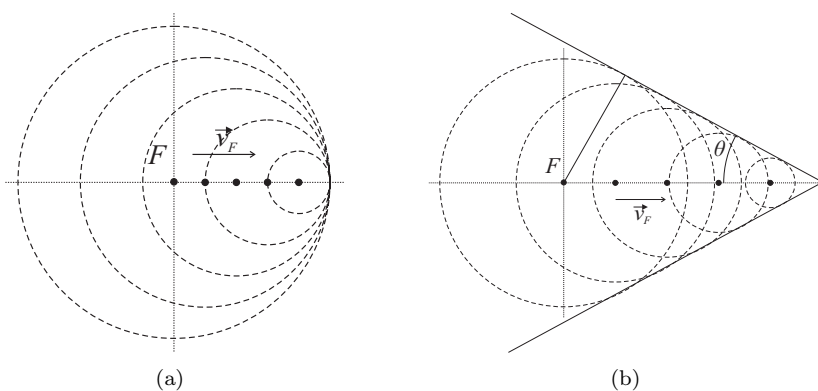


Figura 8: Ondas emitidas por un foco F moviéndose: a) con $v_F = c$; b) con $v_F > c$.

Este efecto ocurre cuando el foco de la onda se mueve a mayor velocidad que la onda en el medio, produciendo que distintos frentes de onda se superpongan y dando lugar a frentes de onda

de mucha mayor amplitud. En la Figura 8(a) se representa el caso en el que el foco se mueve a la misma velocidad que la onda, es decir $v_F = c$. Puede verse cómo los distintos frentes de onda se suponen justo donde está el foco, por lo que al foco le acompaña un frente de onda de gran amplitud.

En la Figura 8(b) se presenta la situación en la que $v_F > c$ y se observa cómo los frentes de onda se superponen en una línea (un cono para ondas esféricas en tres dimensiones) que forma un ángulo θ con la dirección de propagación. Cuando la onda haya viajado una distancia ct , el foco habrá viajado una distancia $v_F t$ y es fácil ver en la figura que

$$\text{sen } \theta = \frac{ct}{v_F t} = \frac{c}{v_F}$$

La situación más famosa donde se da este efecto es en onda sonoras, donde el frente de onda de gran amplitud se conoce como choque sónico. Esto ocurre cuando el foco “rompe la barrera del sonido”, es decir, se desplaza a una velocidad mayor que la del sonido.

4.3. Reflexión y refracción

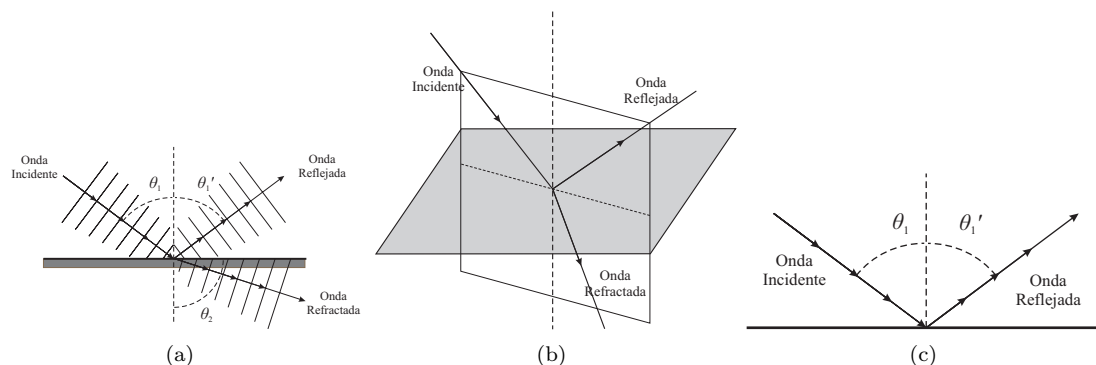


Figura 9: (a) Onda incidiendo sobre una superficie de separación, dando lugar a una onda reflejada y otra refractada; (b) plano que contiene a las ondas incidente, reflejada y refractada; (c) onda incidente y reflejada

Cuando una onda que viaja por un medio llega a una superficie de separación con otro medio, parte de la onda pasa al segundo medio y parte se refleja y vuelve hacia el primer medio. La onda que llega a la superficie de separación se llama *onda incidente*, la que se refleja de vuelta al primer medio se llama *onda reflejada* y la que se transmite al segundo medio se llama *onda transmitida* o *refractada*. Este esquema aparece en ilustrado en la Figura 9(a).

El fenómeno de la reflexión y de la transmisión se pueden explicar bien utilizando el principio de Huygens, que se verá más adelante cuando se trate la difracción, o bien directamente aplicando continuidad de la función de onda y de su derivada. El resultado de este proceso son las tres leyes que rigen este fenómeno:

1. Las direcciones de incidencia, reflexión, refracción y la normal a la superficie de separación son coplanarias (Figura 9(b))
2. Ley de reflexión: El ángulo de incidencia y reflexión cumplen (Figura 9(c)):

$$\theta_1 = \theta_1'$$

3. Ley de refracción: Los ángulos de incidencia y de refracción cumplen:

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{c_1} = \frac{\text{sen}(\theta_2)}{c_2}$$

Las velocidades de las ondas suelen ser números bastante grandes, por lo que es habitual trabajar con el *índice de refracción*, que se define como el cociente entre la velocidad de la onda en un medio de referencia y la velocidad de la onda en el medio en cuestión. Si c es la velocidad de la onda en el medio de referencia y c_1 la velocidad de la onda en el medio 1, el índice de refracción del medio n_1 será:

$$n_1 = \frac{c}{c_1}$$

Para ondas acústicas, c se suele tomar igual a 340 m/s, y n_1 puede ser mayor o menor que uno, dependiendo del medio. En óptica (ondas electromagnéticas), c es la velocidad de la onda en el vacío, y n_1 es siempre mayor que uno. Utilizando el índice de refracción, la ley de la refracción queda

$$n_1 \text{ sen } \theta_1 = n_2 \text{ sen } \theta_2$$

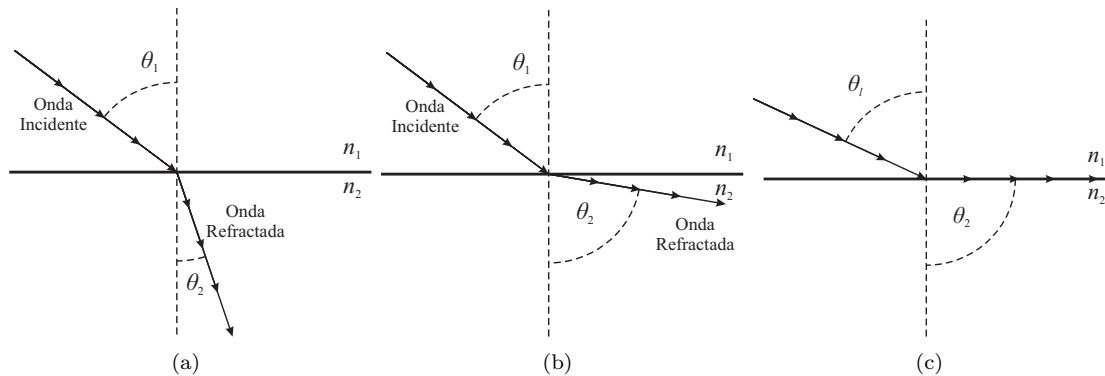


Figura 10: Onda incidente y refractada para (a) $n_1 < n_2$; (b) $n_1 > n_2$ (c) $n_1 > n_2$ y ángulo de incidencia $\theta_1 = \theta_l$.

Se pueden tener dos casos, que $c_1 > c_2$ o que $c_1 < c_2$. Vamos a estudiarlos por separado:

- $c_1 > c_2$. En este caso $n_1 < n_2$ y por tanto $\theta_1 > \theta_2$, es decir, la onda refractada se acerca a la normal (Figura 10(a)).
- $c_1 < c_2$. En este caso $n_1 > n_2$ y por tanto $\theta_1 < \theta_2$, es decir, la onda refractada se aleja de la normal (Figura 10(b)). En este caso existe una situación especial, a medida que θ_1 aumenta, θ_2 se aleja más y más de la normal, acercándose a la superficie, hasta que para un ángulo límite $\theta_1 = \theta_l$ el ángulo refractado será $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, es decir, la onda refractada llevará la misma dirección que la superficie (Figura 10(c)). Para ángulos de incidencia $\theta_1 > \theta_l$ se tiene que no hay ningún ángulo θ_2 que pueda cumplir la ecuación de la refracción, lo que implica que **no hay onda refractada** y toda la onda se refleja. Este fenómeno se conoce como *reflexión completa*, y es el fundamento de fenómenos como los espejismos y los barcos fantasma, y de tecnologías como la fibra óptica.

4.4. Superposición e interferencia

Cuando dos o más ondas planas coinciden en una misma región del espacio sus contribuciones se suman, produciéndose el efecto de *interferencia* entre las ondas, de forma que aparece una onda resultante que es el resultado de la suma de las ondas individuales. Esto es posible ya que la ecuación de onda es lineal, por lo que la suma de dos soluciones de la ecuación diferencial es también una solución.

Matemáticamente, si $\psi_1(\vec{r}, t)$ es una onda y $\psi_2(\vec{r}, t)$ es la otra onda que conviven en una misma región, la onda resultante será

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$$

A partir de esta descripción tan sencilla del fenómeno se pueden explicar multitud de situaciones y efectos ondulatorios. En este apartado sólo vamos a estudiar el caso de dos ondas, pero el estudio es extensible a un número mayor de ondas. A continuación estudiaremos varios ejemplos.

Ejemplo 1: La situación más sencilla son dos ondas planas $\psi_1(x, t)$ y $\psi_2(x, t)$, desplazándose en la misma dirección y sentido, de igual amplitud y frecuencia, y con un cierto desfase entre ellas:

$$\psi_1(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad \text{y} \quad \psi_2(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx - \varphi)$$

donde φ es el desfase entre las ondas. En este caso la onda resultante $\psi(x, t)$ será la suma de las dos:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi)$$

Esta última suma se puede hacer teniendo en cuenta que:

$$\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

con lo que la onda total queda:

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Como puede verse, la onda resultante es una onda propagándose en la misma dirección y sentido que las dos ondas individuales, de igual frecuencia y de amplitud $2A \cos(\frac{\varphi}{2})$. En el caso en el que el desfase φ entre las dos ondas sea nulo (ondas en fase), la amplitud de la onda resultante será máxima e igual a $2A$, diciéndose que se ha producido una interferencia constructiva. En el caso en el que el desfase sea igual a π (ondas en oposición de fase), la amplitud será nula, diciéndose que se ha producido una interferencia destructiva. El caso en el que $\varphi = \pi/2$ las ondas están en cuadratura y la amplitud es A . Resumiendo:

- Si $\varphi = 0$ (ondas en fase), amplitud $2A$ e interferencia constructiva.
- Si $\varphi = \pi$ (ondas en oposición de fase), amplitud nula e interferencia destructiva.
- Si $\varphi = \pi/2$ (ondas en cuadratura), amplitud A .

Ejemplo 2: Si se tiene la misma situación, pero las amplitudes no son iguales:

$$\psi_1(x, t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx) \quad \text{y} \quad \psi_2(x, t) = A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx - \varphi)$$

la onda resultante será:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = A_1 \operatorname{sen}(\omega t - kx) + A_2 \operatorname{sen}(\omega t - kx + \varphi) = A_r \operatorname{sen}(\omega t - kx + \phi)$$

donde

$$A_r = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi)} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan\left(\frac{A_2 \operatorname{sen}(\varphi)}{A_1 + A_2 \cos(\varphi)}\right)$$

Por tanto, la amplitud máxima y mínima ocurrirán para los mismos valores del desfase que en el caso anterior, pero el valor mínimo de la amplitud no llega nunca a ser nulo.

Ejemplo 3: Una situación bastante común en los procesos de interferencia es que una misma onda llega a un determinado punto a través de dos caminos distintos, produciendo un desfase relativo entre las dos ondas que llegan, que serán de la forma:

$$\psi_1(x, t) = A \text{sen}(\omega t - ks_1) \quad \text{y} \quad \psi_2(x, t) = A \text{sen}(\omega t - ks_2)$$

donde s_1 y s_2 son las distancias recorridas por la onda a través del primer y el segundo camino, respectivamente, hasta llegar al punto x . No existe fase aditiva φ porque el origen de las dos ondas es el mismo y aparecería en las dos ondas (lo que interesa es el desfase relativo). En este caso, en los puntos donde llegan las dos ondas se tiene:

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(k \frac{s_1 - s_2}{2}\right) \text{sen}\left(\omega t - k \frac{s_1 + s_2}{2}\right)$$

En este caso también se tendrán situaciones en las que la amplitud sea máxima y situaciones en que sea mínima. Si la diferencia de camino se nota como $\Delta s = s_1 - s_2$, se tendrán:

- Si $k\Delta s = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots = 2n\pi$, con n entero, la amplitud será $2A$ y tendríamos una interferencia constructiva. Esto implica:

$$\Delta s = \frac{2n\pi}{k} = n\lambda$$

- Si $\Delta s = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots = (2n - 1)\pi$, con n entero, la amplitud será nula y tendríamos una interferencia destructiva. Esto implica:

$$\Delta s = \frac{(2n - 1)\pi}{k} = (2n - 1)\frac{\lambda}{2}$$

Esta situación ocurre en multitud de situaciones, dispositivos y experimentos. Por ejemplo, el tubo de Quincke es un dispositivo en acústico en el que el sonido que entra sigue dos ramas de distinta longitud en forma de "U" y se vuelve a unir al final. La longitud de una de las dos ramas se puede variar, permitiendo producir interferencia constructiva o destructiva al variar esta longitud de acuerdo con las reglas antes enunciadas.

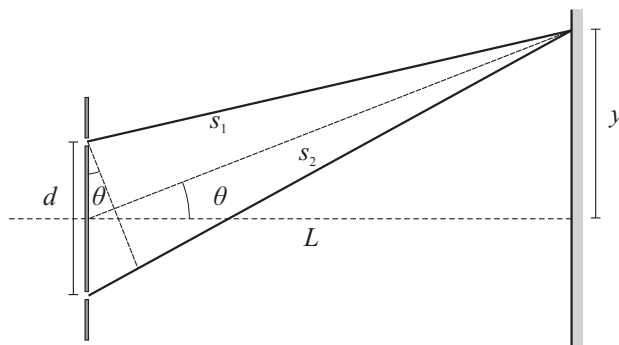


Figura 11: Experimento de doble rendija.

Sin embargo el ejemplo históricamente más importante es el del experimento de doble rendija o de Young, en el que una misma onda se hace pasar por dos rendijas separadas una distancia d . Si la onda resultante se detecta en un plano paralelo a las dos rendijas y a una distancia L de éstas, se encontrarán distintas posiciones en el plano de detección donde la amplitud de la onda será máxima y otras en las que la amplitud será nula, en un típico patrón de interferencia. Para una altura y respecto del eje del sistema y para diferencias de camino pequeñas se tiene:

$$s_2 - s_1 \approx d \text{sen}(\theta) = d \frac{y}{L}$$

por lo que los puntos con interferencia destructiva se encontrarán en $y = \frac{nL\lambda}{d}$ y los puntos de interferencia constructiva en $y = \frac{(2n-1)L\lambda}{2d}$.

Ejemplo 4: En este último caso estudiaremos la situación en la que dos ondas propagándose en la misma dirección y sentido con amplitudes iguales y frecuencias muy parecidas, $\omega_1 \approx \omega_2$, y por tanto $k_1 \approx k_2$.

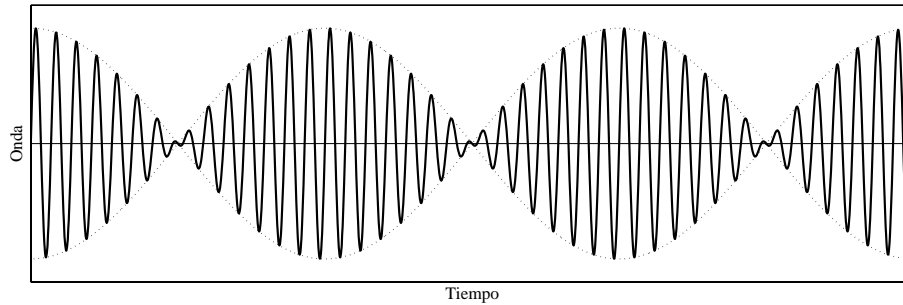


Figura 12: Suma de dos ondas de frecuencias similares, para un punto concreto en función del tiempo.

En este caso las ondas serán:

$$\psi_1(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega_1 t - k_1 x) \quad \text{y} \quad \psi_2(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega_2 t - k_2 x)$$

La onda resultante será:

$$\psi(x, t) = 2A \operatorname{sen} \left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t - \frac{k_2 + k_1}{2} x \right) \cos \left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t - \frac{k_2 - k_1}{2} x \right)$$

Si se nota $\Delta k = k_2 - k_1$ y $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$, la onda resultante quedará:

$$\psi(x, t) \approx 2A \cos \left(\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \operatorname{sen}(\omega_1 t - k_1 x)$$

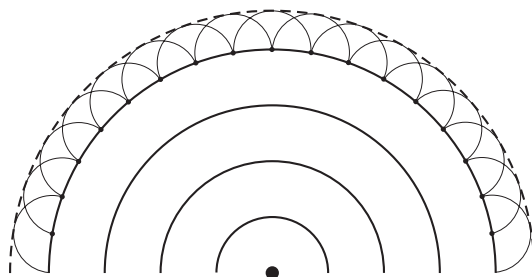
Si las frecuencias son muy parecidas $\Delta \omega$ y Δk serán muy pequeñas, de forma que variarán muy lentamente, tanto con el tiempo como con el espacio. De esta forma se puede considerar la onda resultante como una onda armónica, de frecuencia ω_1 y amplitud que varía lentamente con el tiempo y con el espacio de forma (véase Figura 12)

$$2A \cos \left(\frac{\Delta \omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right)$$

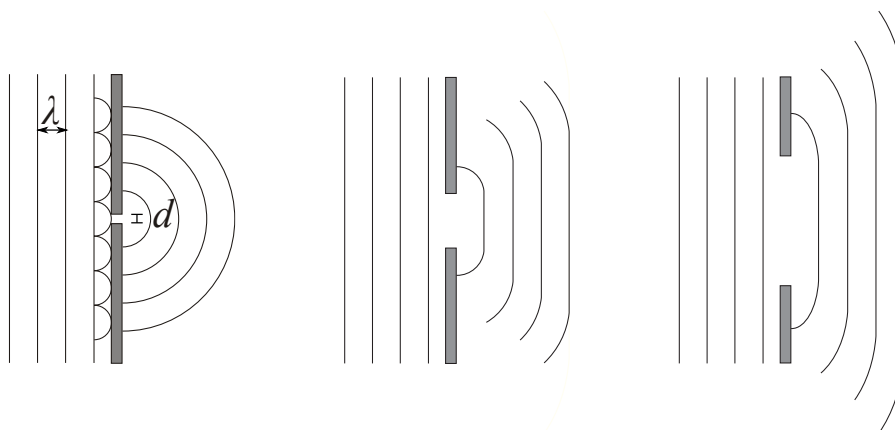
A este efecto se le llama pulsaciones y es el fundamento de la amplitud modulada.

4.5. Difracción

Los principales fenómenos ondulatorios que ocurren al encontrarse las ondas con superficies de separación entre medios son la reflexión, la refracción y la difracción. En este apartado estudiaremos este último fenómeno, mientras que los otros dos ya se han estudiado en la Sección 4.3. Estos fenómenos se han explicado clásicamente a partir de la teoría geométrica, basada en el principio de Huygens, aunque también se pueden explicar a partir de la teoría ondulatoria posterior.

Figura 13: *Esquema del principio de Huygens.*

El principio de Huygens considera que cada punto de un frente de onda se puede considerar como un origen o fuente de onda secundaria propagándose en todas las direcciones del espacio. El nuevo frente de onda se obtiene construyendo una superficie tangente o envolvente a estas ondas secundarias, lo que se esquematiza en la Figura 13. El efecto de difracción ocurre cuando el frente de onda resulta cortado por la existencia de un obstáculo, lo que produce que esta envolvente, que constituye el frente de onda en su propagación, cambie de forma en función de la forma del objeto.

Figura 14: *Ondas planas incidiendo en aberturas de distinto tamaño*

La difracción será tanto más importante cuanto menor sea el tamaño del objeto en comparación con el tamaño de la longitud de onda. En estos casos la propagación de la onda dejará de ser rectilínea y tenderá a rodear al objeto. La situación es igual si en vez de un objeto tenemos una abertura como se presenta en la Figura 14.

Este efecto se trata matemáticamente de una forma similar a la que se utilizó para tratar la interferencia (Sección 4.4). Por ejemplo, cuando una onda se hace pasar a través de una rendija de tamaño d comparable a la longitud de onda λ , los puntos de esta rendija a los cuales llega la onda se comportarán como focos individuales. A una distancia L de la rendija, la onda resultante que se obtendrá será la suma de las ondas individuales provenientes de cada uno de los puntos de la rendija, siguiendo un esquema de interferencia. Así tendremos zonas de máximo y mínimo dependiendo si la interferencia producida por las diversas ondas es constructiva o destructiva.

Por ejemplo, para una rendija de anchura $d \sim \lambda$, a una distancia suficientemente grande de

esta ($L \gg d$), la onda resultante presentará un mínimo de amplitud en aquellos puntos que formen ángulos θ_n con el eje del sistema que cumplan:

$$\text{sen } \theta_n = n \frac{\lambda}{d}$$

con n cualquier entero distinto del cero. Intercalado entre mínimos nos encontraremos máximos. Para $n = 0$, que correspondería con el eje del sistema, aparece un máximo central de mucha más intensidad que el resto (aproximadamente el 90 % de la energía se concentra en este máximo). El ancho de este máximo central es por tanto $\text{sen } \theta_1 = \frac{\lambda}{d}$.

Si la apertura es circular, lo que tendremos será una zona circular central con mucha energía, una zona anular donde hay un mínimo de la amplitud, seguida de sucesivos anillos de máximos y mínimos. En este caso, el ancho de la mancha central será:

$$\text{sen } \theta_n = 1,22n \frac{\lambda}{d} \quad (22)$$

En sistemas ópticos la luz proveniente de un punto pasa por distintas lentes hasta que se proyecta en un plano donde se recoge la imagen, como las lentes son esféricas es la misma situación que se tiene cuando la luz pasa por una apertura circular. En estos casos, lo que se persigue es que la mancha central sea lo más pequeña posible, de forma que a un punto de luz le corresponda una imagen lo más parecida a un punto. Para disminuir el radio de la mancha lo que se hace es aumentar el diámetro de las lentes del sistema óptico, d , como sucede en los telescopios.

Por otro lado, un altavoz se puede considerar como una membrana circular desde la que se emiten ondas, lo que es idéntico a la situación de un orificio circular. En este caso lo que se pretende es que el sonido emitido por el altavoz se distribuya lo más uniformemente posible en el espacio. Es fácil encontrar a partir de la fórmula (22) que para un altavoz de un diámetro de $d = 30$ cm, a una frecuencia de 1.200 Hz el ángulo de la mancha central es aproximadamente de 90° , es decir el sonido se distribuye por todo el espacio. Sin embargo, para el mismo altavoz un sonido de 10.000 Hz produce una mancha central de sólo 8° , lo que no es aceptable. Este es el motivo de que los altavoces de agudos se construyan con un pequeño diámetro en los sistemas de alta fidelidad.

5. Ondas estacionarias

Un caso muy interesante dentro de los fenómenos de interferencia es cuando se tiene dos ondas de igual amplitud y frecuencia, pero viajando en sentidos contrarios. Esta situación se podría haber estudiado cuando se estudió interferencia, pero se ha preferido estudiar por separado debido a su importancia.

En este caso se tendrán dos ondas de la forma:

$$\psi_1(x, t) = A \text{sen}(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{y} \quad \psi_2(x, t) = A \text{sen}(\omega t + kx + \varphi_2)$$

La onda resultante queda:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x, t) + \psi_2(x, t) = 2A \cos(kx + \phi) \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

donde se ha definido $\phi = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ y $\varphi = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}$.

La ecuación (23) se puede escribir como:

$$\psi(x, t) = A(x) \text{sen}(\omega t + \varphi)$$

con $A(x) = 2A \cos(kx + \phi)$. Esto quiere decir que los puntos oscilan siguiendo un movimiento armónico simple pero no con la misma amplitud, como pasaba en las ondas planas, sino con una amplitud que dependerá del punto considerado.

Existirán puntos donde la amplitud será máxima e igual a $2A$, que tendrán que cumplir $|\cos(kx + \phi)| = 1$. Para que suceda esto, los puntos deben cumplir:

$$kx_n + \phi = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots, = n\pi$$

con n entero. Si se despeja la posición de estos puntos queda:

$$kx_n = n\pi - \phi \implies x_n = \frac{n\pi}{k} - \frac{\phi}{k} \implies x_n = \frac{n\lambda}{2} - \frac{\phi\lambda}{2\pi}$$

Estos puntos de amplitud máxima se llaman *vientres* y es fácil ver que la distancia entre dos vientres consecutivos es igual a $\frac{\lambda}{2}$.

Existirán otros puntos donde la amplitud será nula, que cumplirán $\cos(kx + \phi) = 0$. Para que suceda esto, los puntos deben cumplir:

$$kx_n + \phi = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots, = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

con n entero. Si se despeja la posición de estos puntos queda:

$$kx_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} - \phi \implies x_n = \frac{(2n-1)\pi}{2k} - \frac{\phi}{k} \implies x_n = \frac{(2n-1)\lambda}{4} - \frac{\phi\lambda}{2\pi}$$

Estos puntos de amplitud nula se llaman *nodos* y es fácil ver que la distancia entre dos nodos consecutivos es igual a $\frac{\lambda}{2}$.

Por otra parte, observando la posición de vientres y nodos, se puede ver que la distancia entre vientre y nodo consecutivo es de $\frac{\lambda}{4}$, lo que implica que los vientres y los nodos están intercalados.

Las ondas estacionarias no transportan energía, por lo que no se puede hablar propiamente de una onda.

5.1. Ondas confinadas

Una situación muy habitual en la que se producen ondas estacionarias es cuando una onda armónica viaja en un medio hacia la derecha, llega al extremo de este medio y se refleja completamente. En esta situación se tendrá una onda viajando hacia la derecha y otra igual viajando hacia la izquierda. Esto sucede, por ejemplo en una cuerda con dos extremos, uno en $x = 0$ y otro en $x = L$. Las condiciones que se cumplen en estos extremos se conocen como *condiciones de contorno*.

Si los extremos de la cuerda permanecen fijos, la onda en estos puntos debe ser cero para cualquier tiempo, lo que implica:

$$\psi(x = 0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(x = L, t) = 0$$

Comencemos imponiendo la primera de las condiciones de contorno en la onda (23):

$$\psi(x = 0, t) = 2A \cos(\phi) \sin(\omega t + \varphi) = 0 \implies \cos(\phi) = 0 \implies \phi = (2n-1)\frac{\pi}{2}$$

con n cualquier número entero. Se puede elegir cualquiera de los anteriores valores de ϕ , se tomará $\phi = -\frac{\pi}{2}$ con el único fin de que las expresiones sean más compactas.

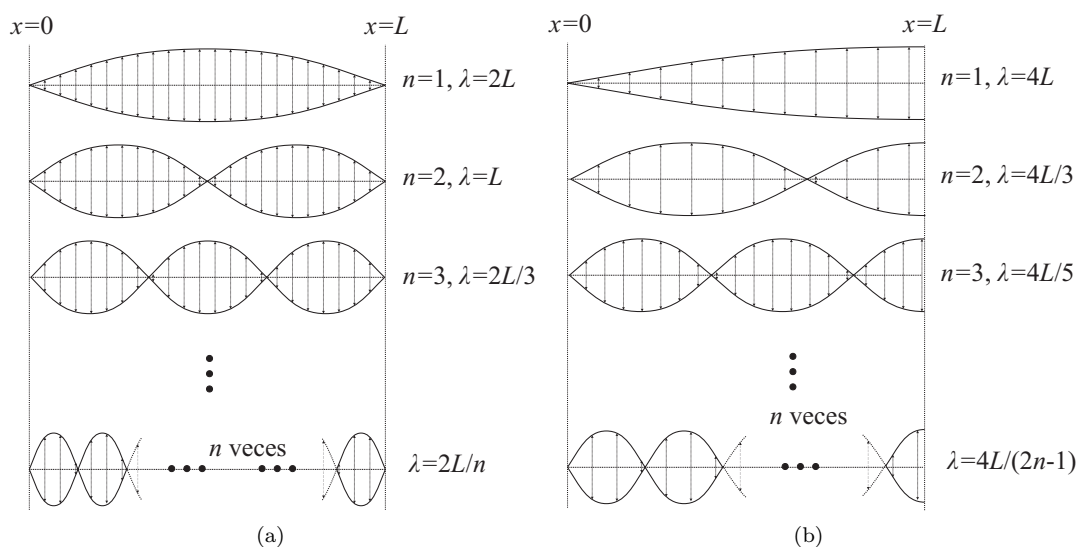


Figura 15: Ondas estacionarias en una cuerda para: (a) dos extremos fijos; (b) un extremo fijo y otro abierto.

Tras imponer la primera condición de contorno, la onda estacionaria queda:

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (24)$$

Si se impone ahora la segunda condición de contorno:

$$\psi(x = L, t) = 2A \cos\left(kL - \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \varphi) = 0 \implies \cos\left(kL - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \implies kL - \frac{\pi}{2} = (2n - 1)\frac{\pi}{2}$$

Por tanto:

$$k_n L = \frac{\pi}{2} + (2n - 1)\frac{\pi}{2} = n\pi \implies k_n = n\frac{\pi}{L} \implies \frac{2\pi}{\lambda_n} = n\frac{\pi}{L} \implies \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Por lo tanto una cuerda fija por los dos extremos sólo puede oscilar con frecuencias:

$$f_n = n\frac{c}{2L}$$

lo que se representa en la Figura 15(a). La frecuencia que se obtiene para $n = 1$, la frecuencia $f_1 = \frac{c}{2L}$ se conoce como frecuencia fundamental. En el caso $n = 2$, se obtiene una frecuencia $f_2 = \frac{c}{L}$, que se conoce como primer armónico. Los sucesivos armónicos se obtienen al ir aumentando el valor de n . Se puede ver cómo los sucesivos armónicos son múltiplos de la frecuencia fundamental.

Esto mismo que hemos visto para una cuerda fija en sus dos extremos es válido para una tubo de aire cerrado por sus extremos. Dentro del tubo, la onda se puede considerar plana, mientras que la capa de aire en contacto con cada uno de sus extremos no se puede mover.

Volviendo al problema de la cuerda, si el extremo en $x = 0$ está fijo, pero el otro extremo en $x = L$ está libre, las condiciones de contorno serían:

$$\psi(x = 0, t) = 0 \quad \text{y} \quad \psi(x = L, t) \implies \text{máximo}$$

Tras aplicar la primera condición de contorno, la función de onda quedaría como (24), pero haciendo $\phi = \frac{\pi}{2}$ para que las expresiones sean más compactas, es decir:

$$\psi(x, t) = 2A \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) \sin(\omega t + \varphi)$$

La segunda condición de contorno implica:

$$|\cos(kL + \frac{\pi}{2})| = 1 \implies k_n L + \frac{\pi}{2} = n\pi$$

Por tanto:

$$k_n L = -\frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \implies \frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{(2n-1)\pi}{2L} \implies \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}$$

Por lo tanto una cuerda fija con un extremo fijo y otro libre sólo puede oscilar con frecuencias:

$$f_n = \frac{(2n-1)c}{4L} \tag{25}$$

lo que se representa en la Figura 15(b). Puede verse como los distintos múltiplos de la primera frecuencia, pero siempre múltiplos impares. A diferencia del caso de dos extremos fijos, no existen múltiplos pares de la frecuencia fundamental.

En tubos sonoros, la situación análoga sería un tubo con un extremo cerrado y otro abierto, en el que las ondas estacionarias que se establezcan tienen que cumplir la relación de frecuencias (25).

Por último se podría tener la situación de dos extremos abiertos, por ejemplo en un tubo sonoro. En esta situación es fácil comprobar que la frecuencia de los armónicos es igual al caso de dos extremos fijos.