Tema 5. Corrientes estacionarias

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción

En la última sección del tema anterior se estudió qué es lo que sucede en un conductor cuando existe un campo electrostático externo. Se observó cómo sobre las cargas libres de los conductores aparece una fuerza que provoca que los electrones se muevan hasta que se encuentren con la superficie del conductor, donde se acumulan. Esta acumulación de carga induce otro campo electrostático dentro del conductor que se opone al campo externo, de forma que la acumulación de carga continúa hasta que el campo externo y el inducido se igualan. Llegado este punto no existe fuerza sobre las cargas y éstas dejan de moverse. A esta situación en la que las cargas libres han dejado de moverse se denominó estado *estático*, y fue esta situación en la que nos centramos en el tema pasado.

En este tema estamos interesados en estudiar lo que ocurre antes de que se establezca el estado estático, es decir vamos a estudiar el movimiento de las cargas libres dentro de conductores. Este movimiento lo estudiaremos para el movimiento de electrones en conductores desde un punto de vista general, para luego concretar y sacar conclusiones en el *estado estacionario*, que es el estado en el que las cargas se mueven sin que las propiedades globales varíen con el tiempo.

2. Intensidad y densidad de corriente

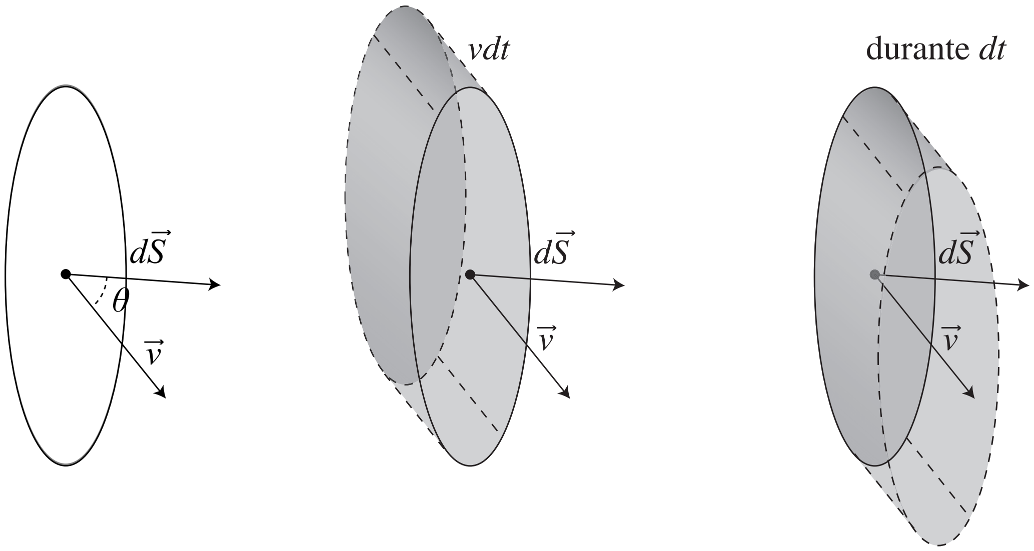
Se dirá que existe una *corriente de carga* cuando existan cargas moviéndose. La situación más común donde existen corrientes es en el seno de conductores, pero también aparecen en semiconductores, en fluidos cargados moviéndose, en disoluciones electrolíticas, plasma, etc. En el tratamiento general nos centraremos en el estudio de las corrientes más comunes, provocadas por el movimiento de las cargas libres en conductores, pero prácticamente todas la conclusiones se pueden extender a otros tipos de corrientes. Por ejemplo, en los conductores sólo existe un tipo de carga móvil, que son los electrones, de manera que las corrientes se producirán con un único tipo de carga moviéndose. A lo largo del tema se estudiarán corrientes de este tipo, es decir, corrientes producidas por el movimiento de un único tipo de carga. Sin embargo, en otro tipo de situaciones, como corrientes en semiconductores, disoluciones electrolíticas o plasma, pueden existir más de un tipo de cargas moviéndose. Para extender las conclusiones de este tema a esas situaciones habrá que tener en cuenta esta diferencia.

Como las cargas se mueven, este movimiento se caracteriza conociendo la cantidad de carga que atraviesa una determinada superficie por unidad de tiempo. A esta magnitud se denomina *intensidad de corriente* o simplemente *intensidad* y se nota como I. Como el movimiento de las cargas puede variar de unos instantes a otros, hay que estudiar el paso de carga en un intervalo de tiempo infinitesimal dt. Durante este intervalo la carga que atraviesa la superficie será dq, por lo que la intensidad se define como:

$$I = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Hay que notar que existe una superficie implícita en la definición (1), que es a través de la cual se está considerando el paso de carga. La unidad de corriente en el sistema internacional es el *amperio* que corresponde con un culombio por segundo, 1 A=1 C/s. En la Sección 5 el Tema 9 de termodinámica se definirá una intensidad calorífica I_q como la cantidad de calor que atravesaba una determinada superficie por unidad de tiempo. En función de esta definición es muy fácil establecer un paralelismo entre aquella corriente y la que estamos tratando en este tema, sin más que cambiar calor por carga.

La definición (1) de la intensidad es suficiente para corrientes lineales (cargas moviéndose por una línea), pero no caracteriza completamente el movimiento de cargas para corrientes superficiales o volúmicas (cargas moviéndose por una superficie o un volumen). Nos centraremos primero en corrientes volúmicas, dejando para el final las corrientes superficiales.



(a) (b) (c)

Figura 1: *Flujo de carga a través de una superficie*

Si una carga libre se mueve llevará una determinada velocidad $\vec{v}$. Como ya hemos dicho, en general pueden existir distintos tipos de cargas moviéndose, pero en este tema vamos a suponer que sólo existe un tipo de carga (que es lo que sucede en conductores), por lo que todos los portadores de carga móviles tendrán una misma carga q. Queremos saber cuál es la carga que atraviesa una determinada superficie $d\vec{S}$ en un tiempo dt, situación que se esquematiza en la Figura 1(a). Para ver cuál es esta carga, en la Figura 1(b) se esquematiza la situación en un determinado instante, y en la Figura 1(c) se presenta la situación justo cuando ha transcurrido un tiempo dt. Como puede observarse, la cantidad de carga que ha atravesado la superficie es la comprendida en el volumen sombreado de estas dos figuras, que corresponde con la carga que se encuentra en el volumen $dV = \vec{v} \cdot d\vec{S}dt$. El volumen de la porción de corriente que aparece en las figuras 1(b) y 1(c) se calcula como el producto de la base por la altura. La base es dS pero la altura no es vdt sino $vdt\,\mathrm{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores $d\vec{S}$ y $\vec{v}$, tal y como aparece en la Figura 1(a).

En general existirá una determinada densidad de cargas libres por unidad de volumen n, que puede variar de unos puntos a otros, y como estamos suponiendo que todas las cargas libres son iguales y de valor q, existirá una densidad volúmica de cargas libres que será $\rho_v = qn$. Utilizando esta densidad de carga libre es fácil calcular cuanta es la carga dq que ha atravesado la superficie $d\vec{S}$ en el tiempo dt, ya que corresponderá al volumen dV por la densidad de cargas libres ρ_v, es decir:

$$dq = \rho_v dV = \rho_v \vec{v} \cdot d\vec{S}dt \tag{2}$$

En la anterior deducción se ha supuesto que la superficie es diferencial. En el caso de que la superficie no sea diferencial, para calcular la carga que la atraviesa habrá que dividir la superficie en pequeños trozos diferenciales, calcular la carga que atraviesa cada pequeño trozo siguiendo

(2), y sumar todas las cargas que atraviesan cada pequeño trozo, lo que implica una integral. Si se hace esto, la carga que atraviesa durante un intervalo dt una superficie S será:

$$dq = \int_S \rho_v \vec{v} \cdot d\vec{S} dt$$

por lo que la carga por unidad de tiempo que atraviesa la superficie S será:

$$\frac{dq}{dt} = \int_S \rho_v \vec{v} \cdot d\vec{S} \tag{3}$$

Si se define el vector densidad de corriente $\vec{\jmath}$ como:

$$\vec{\jmath} = \rho_v \vec{v} \tag{4}$$

puede observarse cómo la expresión (3) no es otra cosa que el flujo de $\vec{\jmath}$ a través de la superficie S, quedando la intensidad como:

$$I = \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} \tag{5}$$

Hasta ahora se ha supuesto que las cargas se mueven por un volumen, por lo que las corrientes son volúmicas, pero puede suceder que las cargas se muevan sólo por una superficie, dando lugar a corrientes superficiales. En este caso, no se tendría una densidad volúmica de cargas libres ρ_v, sino una densidad superficial de cargas libres ρ_s, y la carga que atraviesa una superficie es la carga que atraviesa una determinada línea L, ya que de toda una superficie la carga sólo pasará por la línea L resultante de la intersección de la superficie por donde circula la corriente y la superficie a través de la que se quiere calcular cuánta carga pasa. Esta situación se esquematiza en la Figura 2(a), donde se representa una corriente superficial que a traviesa una superficie S y donde se puede ver la línea L de la superficie por donde únicamente pasa carga. Por tanto, en este caso, el vector densidad de corriente se definirá como $\vec{\jmath}_s = \rho_s \vec{v}$, y la intensidad I queda:

$$I = \int_L \vec{\jmath}_s \cdot d\vec{l} \tag{6}$$

En el caso de corrientes lineales, la densidad de cargas libres será una densidad lineal ρ_l, y toda la carga atravesará un punto, del que no tiene sentido tener en cuenta su orientación. Esta situación se esquematiza en la Figura 2(b). En este caso el módulo de la densidad de corriente será $\vec{\jmath}_l = \rho_l \vec{v}$ y la intensidad queda:

$$I = |\vec{\jmath}_l| \tag{7}$$

En esta última ecuación se puede ver como para el caso de corrientes lineales, la densidad de corriente y la intensidad son prácticamente lo mismo (por lo que $\vec{\jmath}$ no aparece en libros elementales que traten sólo este tipo de corrientes). Esto no ocurre con las corrientes volúmicas y superficiales, como se ha visto en (5) y (6).

3. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad en corrientes eléctricas que se estudia en esta sección es una consecuencia del hecho experimental de que la carga se conserva, lo que se trató de forma general en la Sección 2.2. del tema anterior. Así, aunque las cargas estén en movimiento, la carga se sigue conservando. Esto implica que la carga que entra o sale en una porción del espacio tiene que ser igual al aumento o disminución de carga en dicha porción del espacio.

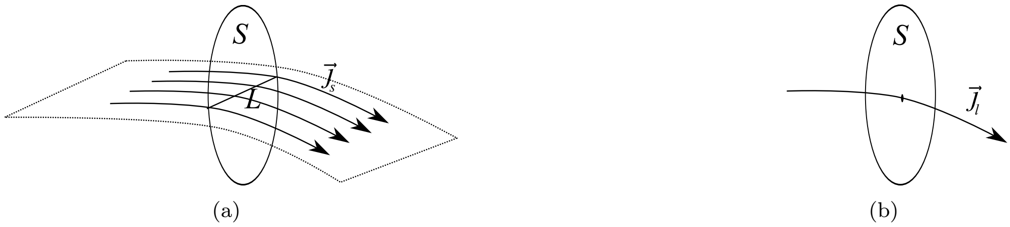


Figura 2: *Corriente superficial (a) y lineal (b) atravesando una superficie S*

De la sección anterior sabemos calcular la cantidad de carga que atraviesa una superficie por unidad de tiempo. Si queremos saber cuál es la carga que entra en una determinada región del espacio no hay más que calcular el flujo de $\vec{\jmath}$ a través de la superficie cerrada que limite el volumen que estamos considerando. Como la carga ni se crea ni se destruye, si entra carga dentro de un volumen, la carga dentro de dicho volumen debe aumentar. Sabemos que el flujo a través de la superficie cerrada que define el volumen es la cantidad de carga que entra por unidad de tiempo, y según lo anterior esto debe ser igual al aumento de carga por unidad de tiempo. Así se tiene:

$$\oint_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \tag{8}$$

donde dq es el aumento de carga que ha tenido lugar dentro del volumen considerado. Esta carga es carga libre ya que es el único tipo de carga que ha entrado. El signo menos se debe a que el flujo será positivo cuando salga carga, y negativo cuando entra carga, debido a que el vector de superficie para una superficie cerrada lleva siempre sentido saliente.

Otra forma de escribir la ecuación de continuidad (8) es haciendo uso de que la carga libre en un determinado volumen se puede expresar como:

$$q = \int_V \rho_v(\vec{r}, t) dV$$

donde se ha especificado que la densidad volúmica de carga libre ρ_v puede depender de la posición y del tiempo. Por tanto:

$$\oint_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(\int_V \rho_v(\vec{r}, t) dV\right) = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dV \tag{9}$$

donde V es el volumen que encierra S. Esta última expresión de la ecuación de continuidad se volverá a utilizar en el último tema del curso para completar las Ecuaciones de Maxwell.

3.1. Continuidad en corrientes estacionarias

En este tema estamos especialmente interesados en las corrientes estacionarias, que son aquéllas en las que las condiciones no varían con el tiempo, por lo que la ecuación (8) queda:

$$\oint_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{10}$$

ya que si se acumula carga neta, las propiedades variarían con el tiempo y no se tendría una corriente estacionaria.

Imaginemos una región del espacio por la que circula una corriente de forma que la velocidad de las cargas es paralela a las paredes (y por tanto también $\vec{\jmath}$), de forma que las cargas no se escapa por las paredes. Una región de este tipo se conoce como un *tubo de corriente*, y se esquematiza en la Figura 3. Un ejemplo de estos tubos de corrientes sería un cable de cobre por el que circula una corriente eléctrica. En este caso, el flujo de $\vec{\jmath}$ sólo es distinto de cero a través de las bases S_1 y S_2, y la ecuación (10) queda:

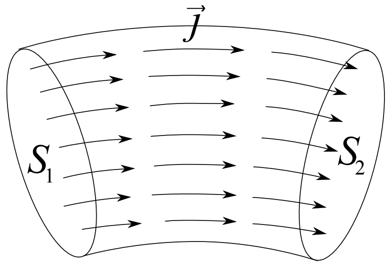


Figura 3: *Tubo de corriente*

$$\int_{S_1} \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} = -I_1 + I_2 = 0$$

por lo que queda que, para dos puntos cualesquiera de un tubo de corriente en situación estacionaria se tiene:

$$I_1 = I_2$$

4. Conductividad y fuerza electromotriz

4.1. Conductividad

Como hemos dicho varias veces, si un conductor se coloca en una región con un campo electrostático $\vec{E}$, sobre las cargas libres se ejercerá una fuerza $q\vec{E}$, y las cargas se moverán. Si ésta fuese la única fuerza que se ejerce, según la segunda ley de Newton las cargas libres se moverían con una aceleración constante, aumentando constantemente su velocidad. Sin embargo esto no ocurre, y la velocidad de las cargas libres se vuelve rápidamente constante, alcanzándose la situación estacionaria con rapidez.

Que se llegue a esta situación es debido a que, aunque no exista ninguna fuerza de ligadura que evite que las cargas libres se muevan por todo el conductor, sí es cierto que éstas experimentan una *resistencia* por parte del material a su movimiento. Esto se debe a que las cargas libres se deben mover entre cargas ligadas del material, de forma que chocarán e interaccionarán con ellas, lo que dificultará su movimiento. Esta resistencia será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad de las partículas, por lo que se puede ver como una fuerza dependiente de la velocidad $\vec{F}_r = -b\vec{v}$ (véase el Tema 1), del tipo que aparecía sobre cuerpos en movimientos en fluidos. Como ya se estudió, en estas situaciones se llega a una velocidad límite $\vec{v}_l$ en la que la fuerza electrostática $q\vec{E}$ es igual a menos la fuerza de rozamiento $b\vec{v}_l$ (de sentido contrario a dicha fuerza de rozamiento). De esta forma la velocidad límite con la que se mueven las cargas es:

$$v_l = \frac{qE}{b}$$

Por lo tanto, se obtiene que una vez alcanzado el estado estacionario, la velocidad límite es proporcional al campo eléctrico, y según (4) se tendrá que la densidad de corriente también es proporcional al campo eléctrico en condiciones estacionarias. Esto se expresa como:

$$\vec{\jmath} = \sigma \vec{E} \tag{11}$$

donde la constante de proporcionalidad σ se conoce como *conductividad*.

La *resistividad* se define como la inversa de la conductividad, por lo que será igual a $\frac{1}{\sigma}$.

4.2. Fuerza electromotriz

A continuación se va a estudiar un conductor cerrado, tal y como son los que aparecen en los circuitos, por el que circula una corriente estacionaria. En la sección anterior vimos en (11) que $\vec{\jmath}$ es proporcional al campo $\vec{E}$. Se puede calcular la circulación de $\vec{E}$ a lo largo del todo el circuito cerrado, lo que resulta:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{\jmath} \cdot d\vec{r}$$

pero si se utiliza la definición de $\vec{\jmath}$ (4) se tiene:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{\sigma} \oint_C \rho_v \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

pero $\vec{v}$ y $d\vec{r}$ tienen siempre la misma dirección y sentido, por lo que el producto escalar es siempre positivo, y la suma de muchas contribuciones positivas tiene que dar un valor positivo. Así que se obtiene que la circulación de $\vec{\jmath}$ a través del circuito cerrado tiene que ser distinta de cero (positiva si ρ_v es positiva y negativa en caso contrario). Por tanto se tiene que para que exista una corriente estacionaria a lo largo de un circuito cerrado se tiene que cumplir:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} \neq 0$$

Sin embargo, en el Tema 4 se estudió que la fuerza electrostática era conservativa, por lo que el campo electrostático también lo era, lo que implica que la circulación a través de cualquier camino cerrado debe ser nulo. Sin embargo antes hemos obtenido que la circulación de $\vec{E}$ a través de cualquier camino cerrado no es nula. ¿Qué es lo que esto significa? Esto significa que el campo $\vec{E}$ que aparece y sostiene las corrientes en circuitos cerrados no puede ser de naturaleza electrostática, por lo menos no completamente. Así dentro de $\vec{E}$ habrá una parte conservativa de naturaleza electrostática $\vec{E}^C$ y otra no conservativa $\vec{E}^{NC}$, de forma que $\vec{E} = \vec{E}^C + \vec{E}^{NC}$, entonces la circulación a través del camino cerrado queda:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E}^C \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{E}^{NC} \cdot d\vec{r} = \oint \vec{E}^{NC} \cdot d\vec{r}$$

es decir, es la componente no conservativa del campo la que permite mantener la corriente circulando en un camino cerrado.

La fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ (también abreviada comúnmente como *fem*) a través de un camino cerrado se define como el trabajo por unidad de carga que la fuerza eléctrica realiza sobre las cargas en movimiento para que completen un giro. Así se tendrá:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

pero hemos visto anteriormente que a la integral a través del circuito cerrado sólo contribuye el campo no conservativo, por lo que la fuerza electromotriz en un circuito cerrado será:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}^{NC} \cdot d\vec{r} \qquad (12)$$

El campo $\vec{E}^{NC}$ puede tener muy distinta naturaleza, y veremos en detalle uno de estos tipos de campos en el Tema 7 de inducción magnética. Las fuentes más comunes de campo eléctrico no conservativo son de tipo magnético (se verá en el Tema 7) y tipo electroquímico, como es el que ocurre en las pilas. En la teoría de circuitos, las fuentes no conservativas de campo se localizan en los generadores, de los que interesa únicamente que son capaces de proporcionar una determinada diferencia de potencial entre sus extremos, sin estudiar como es posible que se produzcan esta diferencia de potencial. Como los generadores serán las únicas partes del circuito donde existan campos no conservativos, en el resto del circuito los campo son conservativos y el estudio es sencillo. La teoría de circuitos se centra precisamente en el estudio de las corrientes en circuitos fuera de los generadores.

La fuerza electromotriz es energía por unidad de carga, por lo que se mide en las mismas unidades que la diferencia de potencial, es decir, voltios (V) en el sistema internacional (S.I.).

5. Resistencia eléctrica y ley de Ohm

La resistencia eléctrica se define para regiones de circuitos en las que no existen campos no conservativos (generadores). La resistencia que existe entre un punto 1 y un punto 2, en el sentido contrario a la corriente, se define como el cociente entre la diferencia de potencial entre los dos puntos y la intensidad que circula:

$$R = \frac{\Delta V}{I} = -\frac{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}}{\int_S \vec{\jmath}\cdot d\vec{S}} = -\frac{\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r}}{\sigma\int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

Se ha elegido que para ir del punto 1 al 2 haya que ir en sentido contrario contraria a la corriente para que la diferencia de potencial sea positiva y la resistencia se defina como una magnitud positiva.

La ley de Ohm se obtiene de la definición de resistencia R y resulta:

$$\Delta V = RI$$

6. Pérdida de energía en corrientes. Ley de Joule

Como hemos dicho antes, existe una fuerza que se opone al movimiento y que es una fuerza de rozamiento que tiende a frenar las cargas libres. Por lo tanto, para mantener las cargas en movimiento con el campo $\vec{E}$ será necesario realizar un trabajo sobre las cargas. Este trabajo que se realiza sobre las cargas será igual al que se pierde por la fuerza de rozamiento ($\vec{F}_r = -b\vec{v}$).

El trabajo que realiza la fuerza eléctrica sobre una carga q para llevarla de un punto 1 a un punto 2 será:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 q\vec{E}\cdot d\vec{r} = q\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{r} = -q\Delta V$$

Se ha visto que la fuerza de rozamiento en situación estacionaria es igual a la fuerza eléctrica pero cambiada de signo, $q\vec{E} = -b\vec{v}$, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento será el mismo que el de la fuerza eléctrica, pero cambiada de signo. El trabajo de la fuerza de rozamiento se disipa en forma de calor, por lo que la energía que se pierde al llevar una carga de un punto a otro será:

$$W_r = q\Delta V$$

Si lo que se mueve es una cantidad de carga dq, la energía que se pierde será

$$dW_r = dq\Delta V$$

Por lo que la potencia que se pierde en una corriente circulando entre dos puntos es:

$$P = \frac{dW_r}{dt} = \frac{dq}{dt}\Delta V = I\Delta V$$

7. Leyes de Kirchhoff

Para terminar con el tema, vamos a estudiar las leyes de Kirchhoff que se utilizaron para estudiar teoría de circuitos en la asignatura de Análisis de Circuitos del primer cuatrimestre, relacionándola con lo estudiado hasta ahora en el tema.

7.1. Primera ley

Esta ley nos dice que la intensidad que entra y la que sale de un nodo (punto de un circuito donde coinciden varias ramas) es la misma, lo que viene a decir que si se tienen N ramas (trozo de un circuito por donde circula una misma corriente) incidiendo en un nodo, se cumple:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \tag{13}$$

donde se ha supuesto que la intensidades que entran son positivas y las que salen son negativas.

Esta ley se obtiene a partir de la ecuación de continuidad (8). Si se toma una superficie cerrada envolviendo a un nodo se tendrá que el flujo de $\vec{\jmath}$ a través de la superficie cerrada será igual a la derivada de la carga acumulada en el volumen definido por la superficie cerrada con respecto al tiempo. Si nos encontramos en una situación estacionaria, la derivada de la carga con respecto al tiempo será nula, ya que la carga permanecerá contante, por lo que el flujo a través de la superficie cerrada será nulo. Pero el flujo de $\vec{\jmath}$ será igual a la intensidad neta que atraviesa la superficie, lo que produce la primera ley (13).

Según lo expuesto anteriormente, la anterior ley sólo es válida para la situación de corrientes estacionarias, es decir, para corrientes continuas una vez ha terminado el estado transitorio (véase oscilaciones forzadas en el Tema 2). Sin embargo, esta ley se utiliza en corrientes alternas, que no es una situación estacionaria. Esto se debe a que las variaciones temporales de las intensidades suelen ser pequeñas comparadas con la velocidad con la que se mueven las cargas, por lo tanto el error que se comente será pequeño. No será así para situaciones en las que las intensidades varían rápidamente, lo que en corrientes alternas implica frecuencias altas.

7.2. Segunda ley

Esta ley dice que en una malla (trozo cerrado dentro de un circuito), donde se encuentran N elementos, la suma de las caídas de potencial en los distintos elementos es cero, es decir:

$$\sum_{i=1}^{N} V_i = 0$$

donde V_i es la caída de potencial en el elemento i de la malla.

Una malla no es otra cosa que una conductor cerrado, donde las fuentes de campo no estacionario están concentradas en los posibles generadores. Estos generadores se suelen considerar simplemente como elementos que mantienen una diferencia de potencial fija entre sus bordes. Así, se puede calcular la diferencia de potencial a través de los distintos puntos de un circuito cerrado, lo que tiene que resultar cero al comenzar y terminar en el mismo punto.