Tema 7. Inducción electromagnética

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción

En el Tema 6 se ha estudiado el campo magnético que es producido por corrientes estacionarias, es decir, por corrientes cuyas propiedades no varían a lo largo del tiempo (aunque sí pueden variar en el espacio). Sería natural suponer que en el caso de corrientes que varían con el tiempo, el efecto en el campo magnético sería simplemente introducir esta dependencia temporal en la fórmula del campo magnético (o de las fuerzas) y obtener de esta forma un campo magnético que varía con el tiempo. Aunque es verdad que las corrientes no estacionarias producen campos magnéticos variables con el tiempo, estas corrientes tienen otro efecto importantísimo: la creación de un campo eléctrico no conservativo.

El hecho de que un campo magnético variable cree un campo eléctrico representa el primer caso hasta ahora en el curso de una relación entre campo eléctrico y campo magnético. Tanto en el Tema 4 como en el Tema 6, los campos eléctricos y magnéticos se habían presentado como independientes entre sí. Esto es así sólo para campos constantes en el tiempo, pero no para campos variables. En este tema veremos cómo la variación de $\vec{B}$ produce un campo electrostático no conservativo, y en el último tema veremos que lo contrario también es cierto: un campo eléctrico variable en el tiempo produce un campo magnético.

2. Ley de Inducción de Faraday

Aunque en el último tema obtendremos la relación directa entra las variaciones de campo magnético y de campo eléctrico, en este tema estudiaremos una relación menos general, que es la ley experimental que se conoce como Ley de Inducción de Faraday o simplemente Ley de Faraday.

En esta ley se trabaja con el flujo del campo magnético a través de una superficie, por lo que en primer lugar definiremos dicho flujo y posteriormente pasaremos a estudiar propiamente la ley.

2.1. Flujo magnético

Hasta ahora, a lo largo del curso, hemos estudiado el flujo del campo electrostático a través de una superficie, que aparecía en la Ley de Gauss en el Tema 4, y el flujo de la densidad de corriente a través de una superficie, que vimos en el Tema 5, que era igual a la intensidad de corriente.

En este tema trabajaremos con el flujo del campo magnético o simplemente *flujo magnético* a través de una superficie S. Al igual que en los casos anteriores, este flujo mide cuánto campo magnético atraviesa la superficie, lo que, repitiendo el mismo procedimiento que se hizo con el flujo del campo eléctrico en la Sección 5.1. del Tema 4, resulta:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{1}$$

Una variación en el campo magnético implica una variación en el flujo, y a continuación estudiaremos los efectos que tienen estas variaciones de flujo.

2.2. Enunciado de la Ley de Inducción de Faraday

La Ley de Faraday trata sobre circuitos lineales cerrados. Cualquier circuito cerrado define infinitas superficies, en concreto todas aquellas superficies cuyo borde coincida con el circuito cerrado. Se puede calcular el flujo del campo magnético a través de cualquiera de estas superficies.

La Ley de Faraday afirma que cualquier variación temporal del flujo magnético induce la aparición de una fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ a lo largo del circuito cerrado. En concreto, la Ley de Faraday resulta:

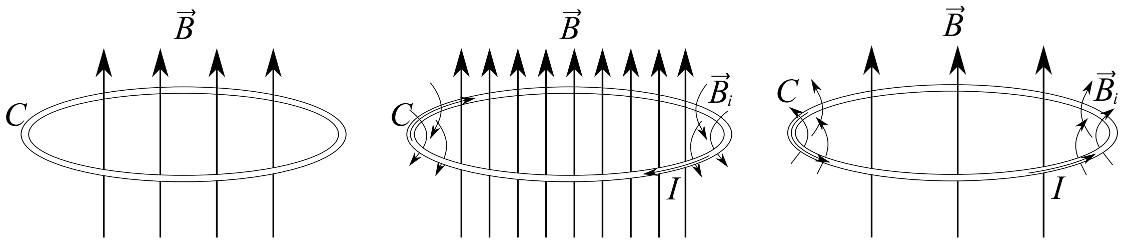
$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

En el Tema 5 vimos que a fuerza electromotriz a lo largo de un circuito cerrado era la circulación del campo eléctrico no conservativo a lo largo del camino cerrado que define el conductor (ecuación (12) del Tema 5), por lo que la aparición de la fuerza electromotriz debida a la variación de flujo magnético implica la aparición de un campo eléctrico no conservativo.

Esta fuerza electromotriz hará que los electrones libres del conductor se muevan, produciendo una corriente inducida en el mismo sentido de la fuerza electromotriz.

2.3. Ley de Lenz

La conocida como Ley de Lenz se refiere al signo menos que aparece en la Ley de Faraday (2), y que se interpreta como que la fuerza electromotriz que se induce produce una corriente cuyo sentido se opone a las variaciones de flujo magnético.



(a) *Circuito cerrado a través del que pasa un campo magnético* $\vec{B}$

(b) *Aumento del campo magnético y corriente inducida*

(c) *Descenso del campo magnético y corriente inducida*

Figura 1:

Para ilustrar esta ley imaginemos un conductor cerrado como el de la Figura 1(a), por el que pasa un campo magnético $\vec{B}$. En un determinado momento se aumenta este campo magnético, que es lo que se representa en la Figura 1(b), por lo que se induce una fuerza electromotriz según (2) y con ello una corriente I. El sentido de la corriente es el que aparece en la Figura 1(b), que se opone al aumento del flujo. Esta corriente se opone al aumento porque, como toda corriente, creará un campo magnético inducido $\vec{B}_i$ que tiende a disminuir el flujo que atraviesa la superficie. Si por el contrario el campo se redujera, como aparece en la Figura 1(c), el flujo de campo magnético a través de la superficie definida por el conductor disminuiría y se inducirá una corriente en sentido contrario al caso anterior, que tiende a contrarrestar la disminución de flujo. Esta tendencia se ve reflejada en el hecho de que el campo inducido que produce la corriente inducida tiende a aumentar el flujo magnético.

3. Aplicaciones de la Ley de Faraday

Para estudiar en mayor profundidad las implicaciones de la Ley de Faraday, es conveniente estudiarlas en situaciones concretas, lo que se va a realizar en este apartado.

Tal y como puede verse de su definición en (1), el flujo magnético puede variar por la variación de tres magnitudes: el campo magnético, el ángulo entre el campo magnético y la superficie y/o la superficie. La variación de cualquiera de las anteriores magnitudes produciría una variación de flujo y por tanto una fuerza electromotriz. A continuación se estudian cada una de las situaciones por separado, aunque pueden aparecer conjuntas en situaciones prácticas.

3.1. Campo magnético variable con el tiempo y circuito fijo

En esta situación, el circuito permanece fijo, así como el ángulo entre el campo magnético y la superficie, y es únicamente el campo magnético lo que varía en función del tiempo. Esta es la situación que se esquematizó en la Figura 1. En este caso el flujo magnético podemos escribirlo como:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos\theta dS$$

donde θ es el ángulo que forman los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ (puede variar de unos puntos de la superficie de integración a otros). Ya que los elementos diferenciales de superficies y el ángulo de estos con el campo se han supuesto que permanecen constantes, la variación temporal del flujo queda entonces:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cos\theta dS$$

Ejemplo: Campo magnético uniforme y perpendicular a un circuito plano, variando con el tiempo. *Este es el ejemplo más sencillo que se puede estudiar. El campo magnético varía con el tiempo, pero en un determinado instante toma el mismo valor en todos los puntos de la superficie plana definida por el circuito plano (lo que es una consecuencia de que el campo es uniforme). Como $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ son perpendiculares y $\vec{B}$ es constante sobre la superficie, el flujo es muy sencillo de calcular y resulta:*

$$\Phi = B(t)S$$

donde S es el área total de la superficie plana definida por el circuito plano. Entonces, la fuerza electromotriz inducida será:

$$\mathcal{E} = -\frac{dB}{dt}S \tag{3}$$

Para obtener el valor concreto de $\mathcal{E}$ hay que conocer la forma explícita de la variación de B con el tiempo. Una vez conocida esta dependencia no hay más que derivarla y sustituir en (3). Por ejemplo, si el campo aumenta de forma constante con el tiempo según la expresión $B(t) = B_0 t$, la fuerza electromotriz inducida sería constante e igual a $-B_0 S$.

Ejemplo: Hilo con corriente variable y circuito cuadrado, de lado a, en el mismo plano que el hilo, y a una distancia L. *Esta situación se esquematiza en la Figura 2(a). En este ejemplo el campo será perpendicular a $d\vec{S}$ en todos los puntos de la superficie que define el circuito cuadrado, pero tendrá módulo distinto de unos puntos a otros de la superficie.*

Cuando por un hilo circula una corriente I, el campo magnético que crea un hilo (se estudió en el tema 6) es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi\rho}\hat{\varphi} \tag{4}$$

En este ejemplo, nos interesa conocer el campo $\vec{B}$ en los puntos de la superficie cuadrada plana definido por el conductor cuadrado. Un "pequeño" trozo de esta superficie situado en la posición $(x, 0, z)$ tendrá un vector diferencial de superficie $d\vec{S} = dxdz\hat{\jmath}$ y el campo magnético que crea el hilo en este elemento diferencial de superficie será $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\hat{\jmath}$. El producto $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ queda:

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} dxdz$$

y el flujo queda:

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_L^{a+L} dx \int_{-a/2}^{a/2} dz \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\int_L^{a+L}\frac{1}{x}dx\int_{-a/2}^{a/2}dz = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi}\ln\left(\frac{L+a}{L}\right)$$

donde se ha tenido en cuenta que, aunque la intensidad varía con el tiempo, no varía al movernos ni en x ni en z, por lo que puede salir de las integrales. Puede verse cómo lo único que depende del tiempo es la intensidad, por lo que la fuerza electromotriz que se induce en el conductor cuadrado, sustituyendo en (2), queda:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{L+a}{L}\right)\frac{dI}{dt} \tag{5}$$

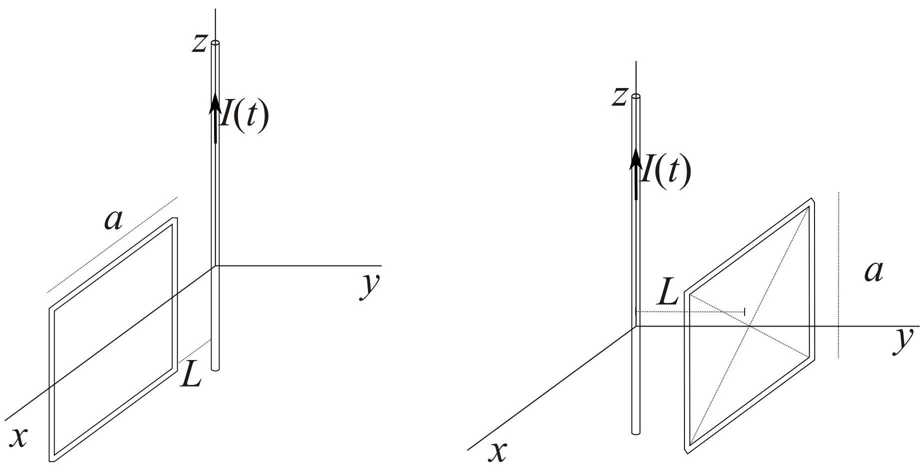
Al igual que en el ejemplo anterior, para obtener el valor concreto de $\mathcal{E}$ hay que conocer la forma explícita de la variación de I con el tiempo, y, una vez conocida esta dependencia, no hay más que derivarla y sustituir en (5). Por ejemplo si la intensidad que circula por el hilo es alterna, de forma que $I(t) = I_0\,\mathrm{sen}(\omega t)$, la fuerza electromotriz inducida será variable e igual a:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{L+a}{L}\right) I_0\omega\cos(\omega t)$$

Ejemplo: Hilo con corriente variable y circuito cuadrado, de lado a, en un plano perpendicular al que contiene al hilo, y a una distancia L. *Esta situación se esquematiza en la Figura 2(b), de forma que el circuito cuadrado está contenido en un plano paralelo al plano xz, con el eje y pasando por el centro del cuadrado.*

En este ejemplo tanto el módulo del campo que crea el hilo como el ángulo entre $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ varía de unas partes a otras de la superficie.

Al igual que en el ejemplo anterior, al circular una corriente por el hilo, éste creará un campo magnético en los distintos elementos diferenciales de superficie $d\vec{S}$ de la superficie definida por el circuito cuadrado. Uno de estos elementos de superficie genérico situado en el punto (x, L, z) tendrá un vector diferencial de superficie $d\vec{S} = dxdz\hat{\jmath}$. El campo que crea un hilo por el que circula una corriente viene dado por (4). Para un punto (x, L, z), la



(a) *Hilo por el que circula una corriente variable y circuito cuadrado en el mismo plano*

(b) *Hilo por el que circula una corriente variable y circuito cuadrado en un plano perpendicular*

Figura 2:

distancia al hilo viene dada por $\rho = \sqrt{x^2 + L^2}$*, mientras que el versor* $\hat{\varphi}$ *se puede expresar en coordenadas cartesianas como* $\hat{\varphi} = \frac{-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$*, de forma que en el punto* (x, L, z) *el versor* $\hat{\varphi}$ *toma la forma:*

$$\hat{\varphi} = \frac{-L\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

Con esto, el campo magnético que crea el hilo en un punto (x, L, z) *queda:*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(x^2 + L^2)} \left(-L\hat{\imath} + x\hat{\jmath}\right)$$

El producto escalar entre el campo y el vector diferencial de superficie es:

$$\vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi(x^2 + L^2)} \left(-L\hat{\imath} + x\hat{\jmath}\right) \cdot \hat{\jmath} dxdz = \frac{\mu_0 I(t) x}{2\pi(x^2 + L^2)} dxdz$$

Con lo que el flujo del campo a lo largo de la superficie queda:

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{\mu_0 I(t) x}{2\pi(x^2 + L^2)} = \frac{\mu_0 I(t) a}{2\pi} \int_{-a/2}^{a/2} dx \frac{x}{x^2 + L^2}$$

La integral que aparece es la integral de una función impar en un intervalo par, lo que produce una integral nula y por tanto el flujo es nulo $(\Phi = 0)$ *sea cual sea la corriente. La derivada del flujo también será cero, por lo que no hay fuerza electromotriz inducida en el circuito cuadrado.*

El hecho de que flujo Φ *sea nulo en esta configuración también se podría haber deducido del hecho de que cada línea de campo que entra en la espira termina también saliendo de la espira, por lo que al calcular el flujo todos los términos de la suma (en realidad es una integral) se cancelan dos a dos.*

3.2. Campo magnético independiente del tiempo (estacionario) y circuito girando (móvil)

La situación en la que el campo magnético está fijo en el tiempo y un conductor gira dentro del campo es una situación muy común, que aparece en muchas situaciones prácticas como generadores y micrófonos.

En este caso ni el campo magnético ni la superficie varían con el tiempo, y lo que varía es el ángulo que existe entra la superficie y el campo. Aunque puede parecer que sólo habrá que tener en cuenta cómo varía el ángulo con el tiempo, la situación puede ser más compleja, ya que si el campo magnético no es uniforme, al girar el conductor puede ocupar zonas donde el campo sea distinto.

Ejemplo: Campo magnético uniforme y estacionario y circuito plano girando. *Este es el ejemplo más sencillo que podemos tener de este tipo de situaciones y es el que se suele dar en la mayoría de las aplicaciones.*

En este ejemplo el campo $\vec{B}$ *es uniforme y no varía, mientras que el circuito es plano por lo que todos los vectores diferenciales llevarán la misma dirección. Así, el producto escalar* $\vec{B} \cdot d\vec{S}$ *se puede escribir como* $BdS\cos\theta$*, con* θ *el ángulo formado entre* $\vec{B}$ *y* $d\vec{S}$*, que es constantes de unos elementos de superficies a otros pero variable en el tiempo. El flujo en este caso queda:*

$$\Phi = \int_S BdS\cos\theta = B\cos\theta \int_S dS = BS\cos\theta$$

donde S *es el área total de la superficie plana definida por el circuito plano. Entonces la fuerza electromotriz inducida es:*

$$\mathcal{E} = -BS\frac{d\cos\theta}{dt} \tag{6}$$

Para obtener el valor concreto de $\mathcal{E}$ hay que conocer la forma explícita de la variación de θ con el tiempo. Una vez conocida esta dependencia no hay más que derivarla y sustituir en (6). Por ejemplo si el circuito gira con velocidad angular constante, de forma que $\theta(t) = \omega t$, la fuerza electromotriz inducida será:

$$\mathcal{E} = BS\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

En un turbina se consigue girar un circuito plano de muchas vueltas mediante algún procedimiento dentro de un campo magnético constante, produciendo de esta forma una corriente alterna.

Aunque no suele aparecer en aplicaciones prácticas, la situación sería idéntica si se tiene un circuito plano fijo y un campo magnético uniforme, constante en módulo y variando con el tiempo su dirección.

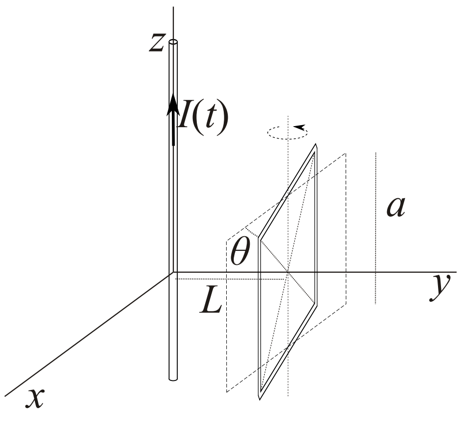
Ejemplo: Hilo con corriente constante y circuito cuadrado, de lado a, girando según un eje paralelo al hilo situado a una distancia L. *Esta situación se esquematiza en la Figura 3(a) y es una de las situaciones más complejas que se pueden tener.*

En este ejemplo tanto el módulo del campo que crea el hilo como el ángulo entre $\vec{B}$ y $d\vec{S}$ varía de unas partes a otras de la superficie, para un mismo instante, al igual que sucedía en el tercer ejemplo del apartado anterior; pero en este caso los puntos que ocupan los elementos de superficies y el ángulo con el campo varían también con el tiempo.

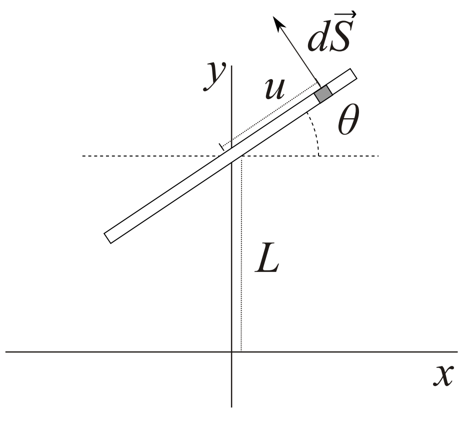
La superficie que define el circuito tiene una dimensión que coincide con la coordenada z y otra dimensión que llamaremos u (ver Figura 3(b)), y que no coincide con x ni con y al estar girando. El área de un elemento de superficie será $dS = dzdu$ y llevará una dirección $-\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$, por lo que:

$$d\vec{S} = dzdu(-\operatorname{sen}\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$$

Este elemento de superficie (que se encuentra en la coordenada (u, z) respecto del cuadrado) ocupa una posición $(-u\cos\theta, L + u\operatorname{sen}\theta, z)$. El campo que crea un hilo por el que circula una corriente viene dado por (4). Para un punto $(-u\cos\theta, L+u\operatorname{sen}\theta, z)$, la distancia al hilo viene dada por $\rho = \sqrt{L^2 + u^2 + 2Lu\operatorname{sen}\theta}$, mientras que el versor $\hat{\varphi}$, que se puede expresar



(a) *Hilo por el que circula una corriente fija y circuito cuadrado girando*



(b) *Hilo por el que circula una corriente fija y circuito cuadrado girando visto desde arriba*

Figura 3:

en coordenadas cartesianas como $\hat{\varphi} = \frac{-y\hat{\imath}+x\hat{\jmath}}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *toma la forma en el punto* $(-u\cos\theta, L + u\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$*:*

$$\hat{\varphi} = \frac{-(L + u\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath} + u\cos\theta\hat{\jmath}}{\sqrt{L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta}}$$

Con esto, el campo magnético que crea el hilo en un punto $(-u\cos\theta, L + u\,\mathrm{sen}\,\theta, z)$ *queda:*

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{(-(L + u\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath} + u\cos\theta\hat{\jmath})}{L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

El producto escalar entre el campo y el vector diferencial de superficie queda:

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot d\vec{S} =& \frac{\mu_0 I dz du}{2\pi(L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta)}\left(-(L + u\,\mathrm{sen}\,\theta)\hat{\imath} + u\cos\theta\hat{\jmath}\right)\cdot(-\mathrm{sen}\,\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})\\ =& \frac{\mu_0 I(t) dz du}{2\pi(L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta)}(L\,\mathrm{sen}\,\theta + u) = \frac{\mu_0 I\,(L\,\mathrm{sen}\,\theta + u)\,dzdu}{2\pi(L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta)}\end{aligned}$$

El flujo del campo a lo largo de la superficie quedará:

$$\begin{aligned}\Phi =& \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} du \frac{\mu_0 I\,(L\,\mathrm{sen}\,\theta + u)}{2\pi(L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta)} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{(L\,\mathrm{sen}\,\theta + u)\,du}{L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta} =\\ =& \left|\begin{array}{c} v = L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{dv}{2} = (u + L\,\mathrm{sen}\,\theta)du \end{array}\right| = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{v} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\left[\ln\left(L^2 + u^2 + 2Lu\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} =\\ =& \frac{\mu_0 I a}{2\pi}\frac{\ln\left(L^2 + \frac{a^2}{4} + La\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}{\ln\left(L^2 + \frac{a^2}{4} - La\,\mathrm{sen}\,\theta\right)}\end{aligned}$$

La fuerza electromotriz se obtendría derivando la anterior expresión respecto del tiempo, teniendo en cuanta que lo único que varía es θ*. Por supuesto, para obtener la expresión concreta de* $\mathcal{E}$ *habrá que saber como varía* θ *con el tiempo, es decir, como gira.*

3.3. Campo magnético estacionario y circuito variable con el tiempo

Por último se considera el caso de un circuito que varía de forma, sin girar, dentro de una campo magnético estacionario. Ejemplos de esta situación serían circuitos cambiando de área o de forma dentro de un campo magnético que no varía con el tiempo (aunque podría variar de un punto a otro).

Ejemplo: Campo magnético uniforme y estacionario y circuito plano rectangular aumentando su área. *Esta situación es una de las más sencillas de esta clase de situaciones.*

En este ejemplo el campo $\vec{B}$ *es el uniforme y no varía con el tiempo, mientras que el circuito es plano, perpendicular al campo, con tres extremos fijos y otro moviéndose con velocidad* v*. Así, el producto escalar* $\vec{B}\cdot d\vec{S}$ *resulta* BdS*, con* B *uniforme. El flujo en este caso queda:*

$$\Phi = \int_S BdS = B\int_S dS = BS$$

con S *el área del circuito, que se puede expresar como* $Dx(t)$*, donde* x *varía con el tiempo. La la fuerza electromotriz inducida serían:*

$$\mathcal{E} = -BD\frac{dx}{dt} = -BDv \tag{7}$$

4. Inducción mutua y autoinducción

Para terminar con este tema se estudiará la influencia que la variación de intensidad pasando por un circuito tiene con la fuerza electromotriz inducida, tanto en el mismo circuito como en otro que pueda encontrarse en las proximidades.

4.1. Inducción mutua

Si por un circuito cerrado C' circula una corriente estacionaria I', hemos visto en el tema anterior que este circuito producirá un campo magnético en cualquier punto del espacio. Si existe otro circuito C, a través de la superficie que define este circuito cerrado existirá un flujo del campo magnético producido por C'.

Ahora, si la corriente I' que circula por C' varía con el tiempo, esto producirá un campo magnético variable con el tiempo, y el flujo que atraviesa la superficie definida por C también variará. En este tema hemos estudiado que esta variación del flujo magnético inducirá una fuerza electromotriz a lo largo de C, según la expresión (2). El origen de esta fuerza electromotriz se puede encontrar en la variación de la intensidad I' con el tiempo, de forma que cuanto más rápido varíe esta intensidad mayor será la fuerza electromotriz, y viceversa. La razón entre la fuerza electromotriz y la variación de intensidad I' es una magnitud que sólo depende de la geometría de los circuitos y que se denomina *inducción mútua* L_M:

$$L_M = \frac{|\mathcal{E}|}{\left|\frac{dI'}{dt}\right|}$$

La anterior magnitud es el cociente entre la fuerza electromotriz que se induce en el circuito C, cuando hay una variación de intensidad I' en el circuito C', y dicha variación de intensidad.

También, para los dos circuitos C y C', podríamos tener la situación en la que una corriente variable I circule por el circuito C, lo que produce un flujo de campo magnético variable en el circuito C', y sabemos que producirá una fuerza electromotriz $\mathcal{E}'$ en el circuito C'. Así, podríamos definir otro coeficiente de inducción mutua L'_M como el cociente entre esta fuerza electromotriz $\mathcal{E}'$ y la variación de la intensidad I (que ha provocado la aparición de la fuerza electromotriz) como:

$$L'_M = \frac{|\mathcal{E}'|}{\left|\frac{dI}{dt}\right|}$$

Se puede demostrar que los dos coeficientes anteriores son iguales y sólo dependen de la geometría del problema. Es decir:

$$L_M = L'_M$$

4.2. Autoinducción

Hasta ahora no hemos tenido en cuenta el efecto que una variación de la corriente en un conductor cerrado tiene sobre el mismo conductor.

Si tenemos un conductor C, por el que circula una corriente estacionaria I, ésta crea un campo magnético en cualquier punto del espacio, y existirá un flujo magnético a través de la superficie que define el propio conductor cerrado. Si la corriente I varía, también lo hará el campo magnético y con ello el anterior flujo, lo que según (2) producirá una fuerza electromotriz en el propio circuito o conductor. Esta fuerza electromotriz tenderá a generar una corriente (que se sumará a la ya existente) que según la Ley de Lenz tenderá a contrarrestar las variaciones de flujo.

El cociente entre la fuerza electromotriz inducida y la variación de intensidad es lo que se conoce como *autoinducción* L, y se define para un circuito como:

$$L = \frac{|\mathcal{E}|}{\left|\frac{dI}{dt}\right|} \tag{8}$$

Conociendo la autoinducción de un circuito, la fuerza electromotriz que se produce en ese circuito se puede obtener sin más que multiplicar esta autoinducción por la variación de intensidad.

Ejemplo: Autoinducción en una bobina de radio a***, número de vueltas*** N ***y longitud*** d***.*** *Una bobina es un solenoide finito, pero si su longitud d es mucho mayor que su radio a, el campo que produce en su interior se aproxima mucho al que produce un solenoide infinito. El campo magnético que produce un solinoide infinito por el que circula una corriente I en su interior es uniforme, en la dirección del eje del solenoide y de valor:*

$$B = \mu_0 I \frac{N}{d}$$

El flujo del campo magnético a través de una de las vueltas del solenoide será el producto del anterior campo por πa^2, pero como tenemos N vueltas el flujo total es N veces el flujo a través de una vuelta, es decir:

$$\Phi = \mu_0 I \frac{N^2}{d} \pi a^2$$

y si la intensidad I varía con el tiempo se producirá una fuerza electromotriz que será:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

De esta forma el coeficiente de autoinducción de una bobina se puede obtener a partir de (8) y queda:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2$$