Apuntes de Teoría de Errores

David Blanco
Alberto Martín
Miguel Ángel Rodríguez
Curso 2011-2012

Índice

1. Introducción

Una magnitud física es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o una sustancia, que puede determinarse cuantitativamente; es decir, es un atributo susceptible de ser medido. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc.

Para establecer el valor de una determinada magnitud tenemos que usar instrumentos y un método de medida. Asimismo, es necesario definir unidades de medida. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una mesa, el instrumento de medida será una regla. Si hemos elegido el Sistema Internacional de Unidades (S.I.), la unidad será el metro y la regla a usar deberá estar calibrada en esa unidad (o submúltiplos). El método de medida consistirá en determinar cuantas veces la regla y/o fracciones de ella entran en la longitud buscada. Otras magnitudes como la velocidad instantánea o la aceleración son más difíciles de medir, lo que implica la utilización de métodos de medida más sofisticados que van mucho más allá del uso de la mera definición de la magnitud. Por ejemplo, para medir la velocidad instantánea de un coche mediante un radar, se genera un pulso electromagnético de frecuencia conocida, se recoge el eco, y se compara la frecuencia del eco con una frecuencia de referencia. Luego, de esta diferencia de frecuencia se obtiene directamente la velocidad instantánea del coche.

En todo proceso de medida existen limitaciones dadas por los instrumentos usados, el método de medida y/o el observador que la realiza. Por ejemplo, cuando se usa un termómetro para medir una temperatura, parte del calor del objeto fluye al termómetro (o viceversa), de modo que la temperatura del objeto varía, modificándose el valor original a causa de la inevitable interacción que se produce. Está claro que esta interacción podrá o no ser significativa: si se está midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero sí lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro.

Debido a que el propio proceso de medida introduce imprecisiones (y a otras consideraciones de índole teórico en las que no vamos a entrar), puede aceptarse como postulado físico que es imposible de conocer el valor real de una magnitud. El principal objetivo de la teoría de errores consiste en acotar el valor de las inevitables imprecisiones, denominadas errores experimentales, para establecer los límites dentro de los cuales se tiene cierta certeza de encontrar el valor de la magnitud que se quiere determinar. Así, en adelante, las medidas vendrán caracterizadas no por un único número sino por un intervalo, denominado *intervalo de confianza*, dentro del cual se espera que se encuentre el valor verdadero, con una determinada probabilidad.

Finalmente, resaltar que en teoría de errores, el concepto de error tiene un significado diferente del habitual. Coloquialmente, se suele usar el término error como sinónimo de equivocación. En la teoría de errores, el error está asociado al concepto de imprecisión o incertidumbre en la determinación del resultado de una medida, y la teoría proporciona las cotas o límites probabilísticos de estas imprecisiones. Gráficamente, se busca establecer un intervalo tal que $\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$ como el de la Figura 1, donde con cierta probabilidad, se pueda decir que se encuentra el valor real de la magnitud x. El valor más representativo de la medida es $\bar{x}$ (que suele ser la media de un núemro de medidas) y al semiancho Δx se denomina *error absoluto* de la medida.

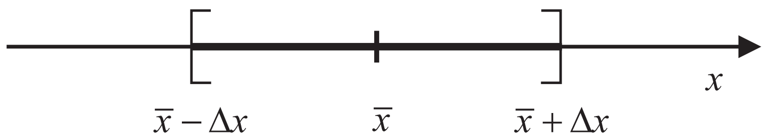

Figura 1: Intervalo de confianza asociado a la medida de x

2. Conceptos importantes

En lo que respecta a los aparatos o métodos de medidas, existen varios conceptos muy importantes que es necesario definir para poder usarlos con propiedad. Hay que tener cuidado con algunos de estos conceptos, ya que su significado coloquial difiere algunas veces del que se utiliza en el ámbito científico.

2.1. Exactitud

La exactitud se define como el grado de concordancia entre el valor verdadero de una magnitud y el obtenido experimentalmente. De modo que, se dice que un instrumento es exacto si las medidas realizadas por él son todas muy próximas al valor verdadero de la magnitud.

La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración del mismo. La exactitud es una medida de la calidad de la calibración del instrumento respecto de patrones de medida aceptados internacionalmente. En general, los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos limites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como el valor mínimo de la magnitud que pueda medir (es decir, su sensibilidad).

2.2. Precisión

El concepto de precisión hace referencia a la concordancia entre una medida y otras de la misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales. De modo que un instrumento será más preciso cuanto menores sean las diferencias entre distintas medidas de una mismas magnitud realizadas en condiciones parecidas.

Aunque exactitud implica normalmente precisión, la afirmación inversa no es cierta ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud. Esto es, aparatos cuyas medidas de una magnitud sean muy parecidas entre sí (y por lo tanto precisas) pero que estén muy lejos del valor verdadero (y por lo tanto poco exactas). Imaginemos que el cronómetro que usamos en un proceso de medida es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es más preciso que el reloj común, pero menos exacto.

2.3. Sensibilidad

La sensibilidad de un aparato está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por el valor de la división más pequeña de la escala de medida. Así por ejemplo, la sensibilidad de una regla cuya mínima división es un milímetro, es de un milímetro. La sensibilidad de una balanza que lo mínimo que aprecia es 0,01 g, es de 0,01 g.

En muchas ocasiones, de un modo erróneo, se toman como equivalentes los conceptos de precisión y sensibilidad aunque del análisis de sus definiciones puede verse que se trata de conceptos diferentes.

3. Clasificación de los tipos de errores

En ciencia se considera que la medición de una magnitud con un cierto error no significa que se haya cometido una equivocación o que se haya realizado una mala medición. Con la indicación del error de medición se expresan, de forma cuantitativa y lo más precisamente posible, las limitaciones que el proceso de medida introduce en la determinación de la magnitud. Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas. Atendiendo a las distintas causas que los producen, los errores pueden clasificarse en tres grandes grupos: errores sistemáticos, errores accidentales y errores espurios.

3.1. Errores sistemáticos

Se denomina error sistemático a aquél originado por las imperfecciones de los métodos de medida. Por tanto, este tipo de errores es constante a lo largo de todo el proceso de medida y afecta de la misma forma a todas las medidas, siendo el mismo para todas ellas (de ahí su nombre). Por ejemplo, en el caso de un reloj que atrasa, las lecturas que se tomen con él tenderán a ser sistemáticamente menores que los valores reales. Lo mismo sucede con una regla dilatada, el error de paralaje, etc.

Estos errores tienen un signo determinado y las causas probables (aunque puede haber otras) pueden ser:

1. *Errores instrumentales.* Estos errores están relacionados con los instrumentos de medida. Un ejemplo de este tipo de errores es el de calibrado.

2. *Errores personales.* Este tipo de errores se debe a limitaciones de carácter personal relacionadas con los observadores que realizan el proceso de medida y son, en general, difíciles de determinar. Un ejemplo de este tipo de errores sería una persona con problemas de tipo visual: es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión sólo pueda apreciar 2 milímetros.

3. *Error en la selección del método.* Como su propio nombre indica, este tipo de errores se produce debido a una elección inadecuada del método de medida de la magnitud.

3.2. Errores accidentales o estadísticos

Se denomina error accidental a aquel que se produce por las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por un mismo operador. Estas variaciones son aleatorias, lo que provoca que de una medida a los valores obtenidos sean en general distintos. Las causas de estos errores son incontrolables para un observador.

Los errores accidentales se producen al azar y son en su mayoría de magnitud muy pequeña. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad tanto por defecto como por exceso. Por tanto, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición.

Un ejemplo de este tipo de error es el que se comete al medir con un cronómetro las mediciones de un péndulo. Si se realiza la medida varias veces se podrá apreciar como los resultados son similares, aunque no exactamente iguales.

3.3. Errores espurios

Supóngase que se desea calcular el volumen de un objeto esférico y para ello se determina su diámetro. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula, se introduce un número equivocado, o se hace usando unidades incorrectas, o bien se usa una expresión incorrecta del volumen, claramente se habrá cometido un error. Esta vez este error está más asociado al concepto convencional de equivocación. A este tipo de errores se le denomina errores espurios y no se les aplica la teoría estadística de errores. El modo de evitarlos consiste en una evaluación cuidadosa de los procedimientos realizados en la medición.

Un ejemplo de este tipo de error es el que se cometió en el Mars Climate Explorer a finales de 1999, al pasar de pulgadas a centímetros, lo que produjo un error que costó el fracaso de dicha misión a Marte.

4. Error absoluto y error relativo

El valor del error por sí mismo no es suficiente para evaluar la calidad de una medida. Imagínese que se determinan dos distancias distintas, la primera con un milímetro de error, y la segunda con un centímetro de error. ¿Se podría decir que la primera medida es mejor que la segunda? Depende de qué es lo que se haya medido. Si, por ejemplo, la primera distancia es el diámetro de un lápiz, y en la segunda la circunferencia del ecuador de la Tierra, claramente la segunda medida es mucho mejor que la primera. A continuación se desarrolla más extensamente esta relación entre los errores y valores de las medidas.

4.1. Error absoluto

Para expresar el valor del error cometido al realizar una medida han de combinarse los errores sistemáticos con los errores estadísticos. Esta combinación de errores constituye el llamado *error absoluto*. El error absoluto se define a través de la siguiente expresión:

$$\boxed{\Delta x = x_i - x_0} \tag{1}$$

donde x_0 representa el valor verdadero de la magnitud que se pretende medir y x_i es el valor de la medida obtenida experimentalmente. Así, el error absoluto proporciona información sobre la desviación respecto al valor verdadero.

El error absoluto tiene las mismas dimensiones que la magnitud medida, lo que implica que se expresa con las mismas unidades. Si $\bar{x}$ es el resultado del proceso de varias medida y Δx su error absoluto, el valor de la magnitud en estudio x, se expresa como:

$$\boxed{x = (\bar{x} \pm \Delta x)\, Unidades} \tag{2}$$

El significado de esta notación es equivalente a decir que, según la medida realizada, el valor de x está contenido en el intervalo $[\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x]$ con una cierta probabilidad razonable p_0. O equivalentemente que: $\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x$ con probabilidad p_0. Un tercera posible notación es: $P(\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x) = p_0$ que significa que la probabilidad de que el valor de la magnitud x esté comprendido entre $\bar{x} - \Delta x$ y $\bar{x} + \Delta x$ es igual a p_0. El valor de p_0 se conoce con el nombre de *coeficiente de confianza* y los valores $\bar{x} - \Delta x$ y $\bar{x} + \Delta x$ determinan el intervalo de confianza para x. Aunque en la ecuación (2) no aparece explícitamente la probabilidad p_0, su valor debe ser conocido en el contexto en el aparezca el valor de la magnitud.

El error absoluto proporciona una medida de la desviación de la medida respecto del valor verdadero en términos absolutos. No obstante, en ocasiones interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin, se usa el *error relativo*.

4.2. Error relativo

El error relativo se define como el cociente entre el error absoluto y el valor de la medida de la magnitud (normalmente la media de varias medidas):

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}} \tag{3}$$

También suele expresarse la cantidad anterior en forma porcentual, así se define el error relativo porcentual de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{x,\%} = \varepsilon_x 100 \tag{4}$$

Como puede verse, el valor relativo es representativo de cómo de importante es el error respecto del valor de la medida, permitiendo de esta manera comparar la calidad de medidas de valores muy dispares.

4.3. Comparación entre distintas medidas

La comparación de dos medidas puede realizarse en virtud de dos criterios:

- El error absoluto.
- El error relativo.

4.3.1. Ejemplo

Imagínese que se mide el espesor de un alambre (cuyo diámetro es $\bar{d} \approx 3$ mm) y su longitud ($\bar{L} \approx 1$ m) con la misma regla graduada en milímetros. Imagínese que en este caso el error absoluto en ambas medidas corresponde con la sensibilidad de la regla utilizada ($\Delta d = \Delta L =$ 1 mm). Justifíquese cuál de las determinaciones anteriores es mejor.

Obviamente, el error absoluto de ambas medidas es el mismo: 1 mm. Sin embargo, el error relativo es distintos, ya que $\varepsilon_{d,\%} \approx 30\,\%$, mientras que $\varepsilon_{L,\%} \approx 0{,}1\,\%$. Por tanto, la medida de la longitud del alambre, que tiene un error relativo de un 0,1 %, es mucho más exacta (¿sería también más precisa?) que la del diámetro, donde el error relativo es del 30 %.

5. Expresión de una medida: cifras significativas

Es habitual al obtener resultados indirectos, mediante una calculadora digital por ejemplo, plantearse con cuantas cifras debe darse el resultado. En situaciones prácticas, esto depende del error que acompañe a la medida, y afecta tanto a resultados indirectos como a medidas directas. En general, el problema consiste en un problema de *cifras significativas* y los criterios a utilizar, tanto en el error como en la medida, se tratan a continuación.

5.1. Expresión del error absoluto

Para expresar de forma correcta la medida de una magnitud concreta hay que comenzar por expresar correctamente el error de la misma. Normalmente, dado que el error absoluto mide la imprecisión de la medida, no tiene mucho sentido ser excesivamente "preciso" en su determinación, lo que viene a decir que es irrelevante incluir muchas cifras significativas en la expresión del error. Las *cifras significativas* de un número son las cifras, empezando por la izquierda, distintas de cero. Por ejemplo, las cifras significativas de 3250 son tres, el 3 el 2 y el 5, mientras que las cifras significativas de 0,043 son dos, el 4 y el 3. En el primer caso, el 3 sería la primera cifra significativa, el 2 la segunda, y así sucesivamente; y en el segundo caso, el 4 es la primera cifra significativa y el 3 la siguiente.

Es necesario establecer un criterio de cuántas cifras significativas hay que incluir en el error absoluto. El criterio que se suele utilizar es mantener entre una y dos cifras significativas, dependiendo del valor de la primera y la segunda, y *redondear* el valor final dependiendo del resto de las cifras significativas. El criterio concreto y el método de redondeo que se toma es el siguiente:

- **Si la primera cifra significativa es 1, se mantienen las dos primeras cifras significativas** y se redondean estas dos cifras dependiendo del valor de la tercera. Esto significa que si la tercera cifra significativa es igual o mayor que cinco, se suma uno a la última cifra significativa, mientras que si es menor, se deja igual. Por ejemplo, si el error absoluto de una medida es $\Delta x = 0{,}0138$, su expresión correcta sería $\Delta x = 0{,}014$, mientras que si es $\Delta x = 0{,}0132$, su expresión correcta sería $\Delta x = 0{,}013$.

- **Si la primera cifra significativa es 2 y la segunda es menor o igual que 5, se mantienen dos cifras significativas**, redondeándose dependiendo del valor de la tercera cifra significativa.

- **Si la primera cifra significativa es 2 y la segunda es mayor que 5, se mantiene una cifra significativa**, redondeándose dependiendo del valor de la segunda cifra (lo que implica que al final la primera y única cifra significativa del error absoluto será 3). Esto quiere decir que no existirán errores del tipo 2,7, 280 o 0,0029, sino que en su lugar se escribirá 3, 300 y 0,003, respectivamente.

- **Si la primera cifra significativa es 3 o mayor, se mantiene una cifra significativa**, redondeándose dependiendo del valor de la segunda cifra.

La anterior regla para tomar cifras significativas del error absoluto implica que en el caso más desfavorable, la diferencia entre el valor redondeado y el valor sin redondear nunca representa más de un 20 % del valor inicial del error.

Ejemplo. *Expresar correctamente los siguientes valores correspondientes a errores absolutos:* 0,0003545*,* 0,00178*,* 0,0254*,* 1995*.*

- $\Delta x = 0{,}0003545$. El primer paso consiste en calcular el número de cifras significativas de Δx. Para empezar a contar hay que buscar la primera cifra distinta de cero empezando por la izquierda. En este caso la primera cifra significativa es un 3. Como se trata de un 3, el número de cifras significativas con las que hay que dar el error es uno. El siguiente paso es redondear el 3, para ello se mira la cifra que le sigue. Como se trata de un 5, hay que aumentar en una unidad el 3 por lo que el error absoluto queda $\Delta x = 0{,}0004$.

- $\Delta x = 0{,}00178$. La primera cifra significativa es un 1 así que el error se da con dos cifras significativas: 0.0017. El siguiente paso es redondear la última cifra significativa: el 7. Como el 7 va seguido de un 8 que es mayor que cinco, habrá que aumentar el 7 en una unidad. Por tanto, $\Delta x = 0{,}0018$.

- $\Delta x = 0{,}025$.

- $\Delta x = 2000$.

5.2. Expresión del valor de la magnitud

Una vez que el error se ha expresado correctamente, es el turno del valor de la magnitud. No tiene sentido dar un valor de la magnitud que sea más sensible que el error absoluto. Por tanto, el valor de la magnitud debe tener tantas cifras significativas como tenga el error absoluto. Dicho valor se redondea dependiendo del valor de la primera cifra significativa despreciada, tal y como se ha explicado anteriormente para el redondeo del error absoluto; es decir, si es mayor o igual a 5 se añade uno a la última cifra significativa no despreciada, y si es menor que 5, se deja igual.

Ejemplo. *Expresar correctamente los valores que aparecen en la izquierda del Cuadro 1.*

Medida	Error Absoluto	Valor correcto
3,418	0,123	$(3{,}42 \pm 0{,}12)$
6,3	0,09	$(6{,}30 \pm 0{,}09)$
46288	1551	(46300 ± 1600)
428,351	0,27	$(428{,}4 \pm 0{,}3)$
0,01683	0,0058	$(0{,}017 \pm 0{,}006)$

Cuadro 1: Ejemplo

6. Estimación del error y del valor de una magnitud con medidas directas

Como ya se ha comentado, es imposible conocer los valores verdaderos de las magnitudes. En esta sección se introduce el método de estimación del valor de una magnitud así como del error absoluto asociado al mismo cuando se dispone de medidas directas de dicha magnitud. Se dice que una medida es directa cuando se obtiene a través de un proceso realizado con un instrumento. La forma en la que se calcula la estimación del valor de la magnitud y del error depende de la forma de realizar la medida, observándose los siguientes casos:

1. *Sólo es posible realizar una única medida de la magnitud.*

   En este caso, el error absoluto coincide con la sensibilidad del instrumento utilizado para realizar la medida y la estimación de la magnitud es el único valor tomado experimentalmente. Este situación **no es deseable** y **hay que tomar más medidas siempre que sea posible**, ya que la probabilidad de que el valor de la magnitud se encuentre en el intervalo de confianza dado es pequeña.

2. *Es posible realizar más de una medida.*

   Con el fin de alcanzar cierta validez estadística en los resultados de las medidas es muy conveniente medir varias veces la magnitud cuyo valor se quiere determinar. Como se ha dicho anteriormente, debido a la inevitable presencia de errores estadísticos, las medidas individuales se presentarán dispersas al rededor del valor real de la magnitud, que es desconocido. El grado de dispersión que presentan las medidas variará de unos experimentos a otros y de unas situaciones a otras, por lo que el tamaño del intervalo que habrá que tomar para acotar el valor real de la medida con una cierta probabilidad variará. Las medidas más dispersas necesitarán de un intervalo mayor para localizar el valor real de la medida con una cierta probabilidad, mientras que para las medidas menos dispersas sucederá lo contrario. El tamaño del intervalo de confianza dependerá, por tanto del número de medidas y de como de dispersas sean éstas.

   Para obtener el intervalo de confianza en un experimento se necesita recurrir a la estadística. El valor concreto del error depende de la probabilidad con la que se quiere acotar el valor de la magnitud, del número de las medidas, así como del valor concreto de dichas medidas. El método estadístico para obtener dicho intervalo en cualquier situación se especifica en el apéndice al final del capítulo, mientras que en esta sección se ilustrará los resultados para tres y cinco medidas, con probabilidades del 80 % y 90 % de que el valor real se encuentre en el intervalo de confianza.

   La variabilidad de un experimento se caracteriza con su media y su desviación estándar. Esta última función indica si las muestras presentan una mayor o menor dispersión respecto

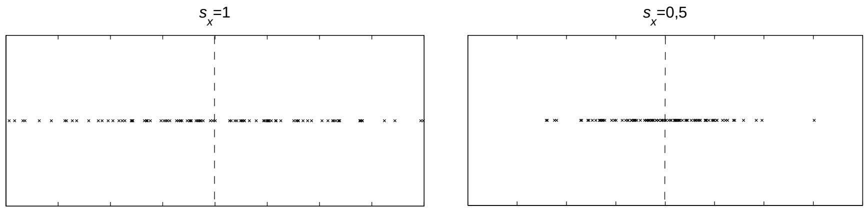

Figura 2: Resultado de 100 medidas de dos magnitudes físicas con igual media y distinta desviación estándar

de la media. En la Figura 2 se representan 100 medias de dos magnitudes físicas con la misma media (marcada con línea vertical). Las medidas de la gráfica de la izquierda corresponden con a la izquierda con una $s_x = 1$, mientras que en la gráfica de la derecha se representan medidas con $s_x = 0{,}5$. Puede verse que mientras menor es s_x, más concentradas están los valores en torno a la media.

La definición de la media $\bar{x}$ y la desviación estándar o típica s_x para un número N de medidas $\{x_1, \ldots, x_N\}$ es:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{y} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \tag{5}$$

En general, el valor real de la magnitud x se puede afirmar que se encuentra con una probabilidad p en el intervalo $[\bar{x} - t_{N,p}\frac{s_x}{\sqrt{N}}, \bar{x} + t_{N,p}\frac{s_x}{\sqrt{N}}]$, donde $t_{N,p}$ es una cantidad que depende del número de medidas N y de la probabilidad p. Según la interpretación de los errores aleatorios, el error absoluto sería $\Delta x = t_{N,p}\frac{s_x}{\sqrt{N}}$ y el valor más representativo de la medida, la media $\bar{x}$. Por tanto, si se toman N medidas distintas de la magnitud, su valor se expresará como:

$$\bar{x} \pm t_{N,p}\frac{s_x}{\sqrt{N}} \tag{6}$$

con las definiciones de $\bar{x}$ y s_x dadas en (5).

Sólo queda por determinar el valor de $t_{N,p}$ en cada situación. Algunos ejemplos para $t_{N,p}$ son:

	$p = 80\,\%$	$p = 90\,\%$
$N = 3$	1,886	2,920
$N = 5$	1,533	2,132

Por tanto, si se toman tres medidas de una misma magnitud, $\{x_1, x_2, x_3\}$, el valor de la magnitud, con una certeza del 80 %, es $\bar{x} \pm 1{,}089 s_x$, lo que aproximadamente se puede tomar como $\bar{x} \pm s_x$. Si se toman cinco medidas, $\{x_1, \ldots, x_5\}$ el valor de la magnitud, con una certeza del 90 %, es $\bar{x} \pm 1{,}066 s_x$, lo que aproximadamente se puede volver a tomar como $\bar{x} \pm s_x$. Es importante notar que en uno y otro caso, el intervalo en el que se supone que está el valor real de la magnitud es el mismo, pero en el segundo caso la probabilidad de que se encuentre dentro es mayor.

6.1. Procedimiento en el laboratorio

En el laboratorio siempre se podrá tomar más de una medida, por lo que **SIEMPRE** se tomarán al menos tres medidas de la magnitud. El procedimiento a realizar en el laboratorio, siempre que no se indique lo contrario en el guión de prácticas, es el siguiente:

1. Se toman tres medidas de la magnitud.
2. Se calcula la media $\bar{x}$ y la desviación típica s_x, tal y como se definen en (5).
3. Se toma como valor estimado de la magnitud $\bar{x} \pm s_x$, teniendo en cuenta que la probabilidad de que el valor de la magnitud se encuentre en el intervalo es del 80 %.
4. Si se observa que el error relativo es muy grande, se pueden tomar dos medidas más, se calcula de nuevo la media y la desviación típica y se toma como valor estimado de la magnitud $\bar{x} \pm 0{,}766 s_x$. De nuevo esto indica que el valor real de la magnitud se encuentra en el anterior intervalo con una probabilidad del 80 %.
5. En cualquiera de los casos, en la expresión del error absoluto y la magnitud se debe tener en cuenta el criterio de cifras significativas dado con anterioridad.
6. Si se prefiere (porque se desee mayor número de medidas para disminuir el error, por ejemplo), se pueden calcular los intervalos de confianza para otras probabilidades y otros números de datos, sin más que seguir las indicaciones del apéndice.
7. En ningún caso, el error resultante puede ser menor que la sensibilidad del aparato. En caso de que la expresión $t_{N,p}\frac{s_x}{\sqrt{N}}$ sea menor que la sensibilidad del aparato, se toma esta última como error absoluto de la medida.

7. Estimación del error y del valor de una magnitud con medidas indirectas

Las medidas indirectas de magnitudes son aquéllas que se realizan a través de su relación con otras magnitudes de las que se poseen medidas directas. Esta relación viene generalmente dada por una expresión matemática (fórmula o ley física) que relaciona las magnitudes ya medidas (variables independientes o datos) con la que se quiere medir (variable dependiente o incógnita). Mediante dicha fórmula puede obtenerse además el error de dicha medida indirecta. Éste será el objetivo de esta sección.

Supóngase que se desea estimar la magnitud $\mathcal{F}$, y que ésta puede expresarse en función de otras magnitudes (por ejemplo, $F = ma$, $v = s/t$, etc.). La relación entre ellas sigue la siguiente expresión matemática:

$$\mathcal{F} = f(x, y, z, ...) \tag{7}$$

Si se conocen los valores de las magnitudes que aparecen en la fórmula (7), es decir x, y, z $\ldots$, y sus errores, el modo de proceder es el siguiente:

1. Se calcula el valor de la magnitud $\mathcal{F}$ sustituyendo en la expresión (7) los valores más representativos de cada una de las variables.
2. Para calcular el valor del error de $\mathcal{F}$, hay que calcular derivadas parciales con respecto a cada una de las variables de las que depende $\mathcal{F}$ y combinarlas de la siguiente forma:

$$\Delta\mathcal{F} = \left|\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z}\right| \Delta z + ... \tag{8}$$

Ejemplo. *Las magnitudes $\mathcal{F}$, x, y y z se relacionan a través de la siguiente expresión:*

$$\mathcal{F} = xy - z \tag{9}$$

La magnitudes x, y y z se han medido de forma directa y sus valores son $x = (3{,}12 \pm 0{,}16)$, $y = (2{,}7 \pm 0{,}4)$ y $z = (12{,}42 \pm 0{,}23)$. Calcular el valor de $\mathcal{F}$ así como el de su error.

En primer lugar se calcula el valor de $\mathcal{F}$ simplemente sustituyendo en la fórmula:

$$\mathcal{F} = 3{,}12 \times 2{,}7 - 12{,}42 = -3{,}9960$$

El siguiente paso es el cálculo del error. Para ello, necesitamos calcular en primer lugar cada una de las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} &= y \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} &= -1 \end{aligned}$$

A continuación se sustituye en la expresión del error:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F} &= |y|\Delta x + |x|\Delta y + |-1|\Delta z \\ &= 2{,}7 \times 0{,}16 + 3{,}12 \times 0{,}4 + 0{,}23 \\ &= 1{,}9100 \end{aligned}$$

Ya sólo queda expresar correctamente tanto la medida como el error. Para ello se siguen los pasos presentados en la Sección 6.1. Y el resultado es:

$$\mathcal{F} = (-4{,}0 \pm 1{,}9)\, Unidades$$

Nota: Trabajar con números irracionales. Cuando se trabaja con números irracionales tales como π, e, etc... no es posible introducir en los cálculos todos los decimales que contienen. Por tanto, estas constantes tendrán un número determinado de cifras y un error, por ejemplo $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}01$ o $\pi = 3{,}1416 \pm 0{,}0001$, y habrá que tener en cuenta su error en el cálculo de errores de medidas indirectas. Sin embargo, el número de cifras significativas que aparecen en una calculadora suele ser muy grande, por lo que el error que se comete por cortar la expresión de los números irracionales suele ser muy pequeño y se puede despreciar frente al resto de los errores. Por tanto, si se toman todos las cifras significativas que aparece en la calculadora, se puede despreciar el error debido a la introducción aproximada del número irracional, pero hay que explicar explícitamente en la práctica el porqué no se tiene en cuenta el error de los números irracionales.

8. Regresión Lineal: Método de Mínimos Cuadrados

Con frecuencia se plantea el problema de encontrar una expresión matemática del tipo $y = f(x)$ de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno a partir de una serie de medidas de las magnitudes x e y que lo caracterizan. En un experimento típico, se cambia el valor de una variable independiente x para observar el comportamiento de otra variable y

dependiente de la anterior; por ejemplo, el cambio de la densidad del agua (y) con la temperatura (x). Cuando hacemos una representación gráfica $y(x)$ (y en el eje vertical de ordenadas y x en el eje horizontal de abscisas), la curva obtenida tendrá una forma dada. En un laboratorio, al reproducir un experimento de este tipo, se podría pensar que se obtendría una gráfica idéntica a la arrojada por la teoría. Sin embargo, la existencia de muchas fuentes de indeterminación (no sólo errores sino también las simplificaciones hechas en la propia teoría, influencias de otros factores, etc) hacen que los datos experimentales no coincidan exactamente con la curva teórica, sino que tiendan a disponerse alrededor de ésta. Surge entonces la pregunta de qué curva "ajusta" o representa mejor los datos experimentales. Con "ajusta" se quiere decir, no que la curva pase exactamente por todos los puntos experimentales, sino que tienda a estar lo más cerca posible de todos ellos en conjunto.

El ajuste de datos experimentales a curvas es extremadamente importante, no sólo para poder comparar con la teoría, sino incluso para poder establecer la validez o no de la teoría en sí. El caso general es complejo y laborioso, así que nos limitaremos a una curva en la que la dependencia entre x e y es lineal, por lo que la curva $y(x)$ es en este caso una recta. El ajuste de relaciones no lineales se trata brevemente en la siguiente subsección.

Supóngase que se dispone de N valores para x, y que para cada valor x_i de la variable independiente se obtiene un valor y_i de la variable dependiente (aquí los subíndices i denotan distintos valores de x e y, y no guardan relación alguna con los valores de una magnitud medida en similares condiciones utilizados en la Sección 6). El problema consiste en encontrar una curva del tipo $y = ax + b$, (una recta, en este caso) que ajuste mejor el conjunto de datos; en concreto, se buscan los valores de a y b tales que la suma de distancias entre la recta y todos los puntos experimentales sea mínima, lo que implica minimizar $R = \sum_i (y_i - ax_i - b)^2$ respecto a a y b.

Como R depende de dos parámetros o incógnitas, a y b, la minimización implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial R}{\partial b} = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2\displaystyle\sum_i (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ -2\displaystyle\sum_i (y_i - ax_i - b) = 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

Como puede verse, la minimización implica la resolución de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, que es muy sencillo de resolver y proporciona los valores óptimos para a y b, que son:

$$a = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} y_j}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{11}$$

$$b = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (y_i - ax_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{j=1}^{N} y_j - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j y_j}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \tag{12}$$

También se pueden obtener los errores de las cantidades a y b, que se notan como Δa y Δb, haciendo un tratamiento estadístico similar al mostrado en la Sección 6 para obtener el error en medidas directas. Las expresiones explicitas son:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2)\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}} \tag{13}$$

$$\Delta b = \sqrt{\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (y_i - ax_i - b)^2}{N-2}\right)} \tag{14}$$

Cuando se quiere conocer la validez o bondad del ajuste, o cuando se tienen dudas sobre si la relación $x - y$ es lineal, se acude al *coeficiente de correlación lineal* (C.C.L.), descrito con la letra r, definido como:

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^{i=N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{\sqrt{\left(N \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2\right)\left(N \sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)^2\right)}} \tag{15}$$

El valor absoluto de r indica cuanto se parece la distribución de puntos experimentales (más de dos parejas de datos) a una recta. Si $|r| = 1$, el ajuste es perfecto; un valor $r = 0{,}95$ nos indica un buen ajuste; un valor de r inferior a 0,85 quiere decir que la suposición de que los pares de medidas (x_i, y_i), para $i = 1, \ldots, N$ (más de dos parejas de datos), están relacionados con un dependencia lineal no es aceptable. Es importante que un modelo puede presentar un elevado valor de r pero grandes errores en los parámetros a y b, lo que indica que dichos valores no son fiables.

8.1. Mínimos Cuadrados en relaciones no lineales

El Método de Mínimos Cuadrados que se ha desarrollado en el apartado anterior solamente puede utilizarse cuando las relaciones entre las variables x e y son lineales. Aunque la dependencia lineal es frecuente entre magnitudes físicas, es posible encontrar muchas otras dependencias más complejas. En general, el esquema a seguir cuando estas relaciones más complejas se presenten consiste en intentar reducirlas a una relación lineal mediante un cambio de variable. El proceso se explica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. *La gravedad puede medirse experimentalmente en un laboratorio soltando una masa desde distintas alturas (h_{0i}) y midiendo el tiempo que tarda en recorrerlas (t_i). Utilice el Método de Mínimos Cuadrados para determinar el valor de g utilizando los valores medidos de forma directa para las magnitudes t y h.*

En primer lugar se analiza el fenómeno físico que ocurre: el movimiento realizado por la masa es un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado. La aceleración de este movimiento es la de la gravedad (g). Por tanto, la relación entre las magnitudes físicas es:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{16}$$

donde $v_0 = 0$ en el caso que se estudia. Cuando la masa llegue al suelo $h =$, por lo que la relación entre h_0 y t resulta:

$$h_0 = \frac{1}{2} g t^2 \tag{17}$$

El objetivo es utilizar el Metódo de Mínimos Cuadrados con los pares de valores medidos de t y h_0 para calcular g. Este método proporciona información sobre el tipo de relación entre las variables (coeficiente de correlación r) y además los valores de los coeficientes a y b a partir de los cuales podrá calcularse el valor de g y su error. Evidentemente, la relación entre las variables medidas no es lineal y para utilizar el Método de Mínimos Cuadrados será necesario hacer primero un cambio de variable. Para ello, es necesario escribir la ecuación (17) de la forma $y = ax + b$ donde y es una función de h_0 ($y = f_1(h_0)$) y x es una función de t ($x = f_2(t)$). En este caso, el cambio $y = f_1(h) = h_0$ y $x = g(t) = t^2$ convierte la ecuación (17) en lineal.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} g x \\ y &= b + ax \end{aligned}$$

El siguiente paso es calcular a, Δa, b, Δb y r con Mínimos Cuadrados. Para ello no se utilizarán directamente los valores de h_0 ni t medidos puesto que su relación no es lineal. En su lugar se utilizarán aquellas magnitudes cuya relación es lineal, esto es, $y = h_0$ y $x = t^2$. Finalmente, el valor de la gravedad puede calcularse de forma indirecta utilizando a y Δa:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} g \Rightarrow g = 2a \\ \Delta g &= \left| \frac{\partial g}{\partial a} \right| \Delta a = 2\Delta a \end{aligned}$$

9. Construcción de Gráficas

En esta sección se introducen algunas reglas para realizar una representación gráfica adecuada de los fenómenos que se estudian en el laboratorio.

- Las gráficas han de representarse con un mallado en ambos ejes, en los extremos de los cuales ha de indicarse la magnitud que se representa así como la unidad en la que se mide (ambos con el símbolo correcto). El título de la representación ha de estar situado en la parte superior de la misma claramente indicado.
- La variable independiente del fenómeno debe ir representada en abscisas y la dependiente en ordenadas.
- Las escalas, sobre ambos ejes, han de permitir una lectura rápida y sencilla. Para ello se elegirán escalas con intervalos adecuados.
- Las escalas deben abarcar todo el intervalo de medidas realizadas y *sólo el citado intervalo.*
- Sobre los ejes sólo se indican los valores correspondientes a las divisiones enteras de la escala usada (que han de quedar uniformemente espaciados). **Nunca** se escriben los valores correspondientes a las medidas realizadas.
- Los valores medidos se representan a ordenador por el punto correspondiente a sus dos coordenadas (punto experimental) y rodeado por el denominado rectángulo de error cuya base abarca desde $\bar{x} - \Delta x$ hasta $\bar{x} + \Delta x$ y cuya altura se extiende desde $\bar{y} - \Delta y$ hasta $\bar{y} + \Delta y$ siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del punto experimental. En el caso de que Δx ó Δy sean despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error queda reducido a un simple segmento vertical o al punto experimental, según el caso.
- Los puntos experimentales deben acompañarse por líneas-guía que ayuden a visualizar la tendencia, siendo líneas finas y continuas, nunca quebradas, y han de pasar por todos los rectángulos de error aunque para ello dejen muchas veces de pasar por los puntos experimentales que pueden quedar a derecha o izquierda de la gráfica.
- Cuando se hagan regresiones lineales, la línea recta del ajuste debe aparecer en la correspondiente gráfica, que no tiene por qué coincidir con la mencionada en el punto anterior.

10. Normas del Laboratorio

1. Leer el guión de prácticas **antes** de entrar en el laboratorio. El profesor preguntará a cada alumno y pondrá una nota que contará en la nota final de prácticas. En ningún caso se permitirá a un alumno realizar una práctica sin haberse leído el guión.

2. El puesto de trabajo ha de estar ordenado y con todo apagado **antes** de abandonar el laboratorio. Antes de irse, cada pareja avisará al profesor para que juntos revisen si todo está en orden y en buen estado.
3. Los dispositivos experimentales no deben tocarse o cambiarse de configuración a menos que lo indique explícitamente el guión. En caso de duda, acudir al profesor.
4. El uso inapropiado del material implicará la expulsión del laboratorio y un cero en la sesión de prácticas.
5. No se permite faltar injustificadamente al laboratorio. Para aquellas faltas que hayan sido debidamente justificadas, se organizará una única sesión especial de recuperación.
6. Las memorias de prácticas se entregarán al profesor dentro de la fecha indicada: no se aceptarán memorias fuera del plazo fijado.
7. Las memorias de prácticas se entregarán al profesor de forma individual o por parejas. En el caso de entregarse por parejas, ambos integrantes serán responsables de la totalidad de las prácticas.
8. La primera memoria de prácticas se entregará al profesor en la segunda sesión de prácticas. Puesto que esta memoria es la primera que se realiza, se devolverá sin nota y con las correcciones oportunas para que el alumno pueda rectificar aquello que deba y la entregue conjuntamente con el resto dentro del plazo fijado.
9. Las memorias de prácticas **tiene que** tener la siguiente estructura:
   - Objetivo. Donde se presentarán los objetivos que se han perseguido con la realización de las experiencias de laboratorio.
   - Material. Donde se presentará un listado del material utilizado.
   - Fundamento teórico. Donde se presentará un breve resumen sobre las leyes físicas o fenómenos estudiados en el laboratorio desde un punto de vista teórico.
   - Desarrollo. Donde se explicará el procedimiento seguido y se presentarán los datos tomados.
   - Resultados. Donde se presentarán los resultados obtenidos con los datos tomados en el laboratorio.
   - Conclusiones. Donde se presentarán las conclusiones más importantes derivadas de la realización de la práctica.
10. Aparte de la estructura antes mencionada, la hora de realizar la memoria de las practicas se debe tener en cuenta las siguientes normas:
    - Se debe limitar la extensión de cada memoria, evitando la información redundante y superflua.
    - No se deben copiar los guiones las prácticas ni partes de ellos en las memorias.
    - No se deben utilizar recursos bibliográficos publicados en internet.
    - Cuidar la ortografía y el estilo de redacción.
11. Las prácticas cuentan hasta un 20 % de la nota global de la asignatura. La nota total de prácticas será un tercio de la nota del examen de teoría de errores y dos tercios de la nota de laboratorio (comportamiento, preparación de las experiencias y sobre todo memorias de prácticas). **La nota mínima para que se haga media en cualquiera de las partes es de 5.**

11. Ejercicios

1. Sin hacer ninguna experiencia de laboratorio, ¿cómo podríamos discernir cuál de estas dos expresiones corresponde al período de pequeñas oscilaciones del péndulo simple: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ ó $T = 2\pi\sqrt{g/l}$, donde l es la longitud y g la gravedad local?

2. Sin hacer ninguna experiencia de laboratorio, ¿cómo podríamos discernir cuál de estas dos expresiones corresponde a la energía cinética: $E = m\left(v/\sqrt{2}\right)^2$ ó $E = m^2v/2$, donde m es la masa del cuerpo y v su velocidad?

3. Redondear correctamente los siguientes valores:

   a) (287367 ± 1298)
   b) (286987 ± 1998)
   c) (785126 ± 24958)
   d) $(0{,}1589 \pm 0{,}02589)$
   e) $(21587 \pm 0{,}0985)$
   f) $(25{,}994 \pm 0{,}2705)$

4. ¿Qué error absoluto y relativo estamos cometiendo al aproximar $\tan x \approx x$ para $x = 1^{\text{o}}$? ¿y $\pi \approx \frac{355}{113}$?

5. Calcúlese el error relativo cometido en el periodo del péndulo, para un ángulo inicial de $\theta_0 = 20^{\text{o}}$, cuando se toma el periodo de pequeñas oscilaciones. Como valor verdadero del periodo tómese la expresión:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

   .

6. Calcule el valor de la magnitud y y de su error en cada uno de los siguientes casos:

   a) $y = a + b$. Con $a = (12{,}2458 \pm 1{,}358)$ y $b = (1{,}2569 \pm 0{,}9586)$
   b) $y = \frac{a}{b}$. Con $a = (-12{,}2458 \pm 1{,}358)$ y $b = (1{,}2569 \pm 0{,}9586)$
   c) $y = be^a + c$. Con $a = (12{,}2458 \pm 1{,}358)$, $b = (1{,}2569 \pm 0{,}9586)$ y $c = (-24{,}589 \pm 2{,}958)$
   d) $y = \sin(\pi a) + \frac{b}{2gc}$. Con $a = (-12{,}2458 \pm 1{,}358)$, $b = (1{,}2569 \pm 0{,}9586)$ y $c = (24{,}589 \pm 2{,}958)$
   e) $y = \frac{c \ln a}{b^2 + c}$. Con $a = (12{,}2458 \pm 1{,}358)$, $b = (1{,}2569 \pm 0{,}9586)$ y $c = (-24{,}589 \pm 2{,}958)$

7. Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol y el área de su sección transversal. ¿Cómo se procedería y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación?

8. El valor medido de una magnitud es 3.243 con todas las cifras que devuelve el dispositivo: ¿con cuántas cifras significativas debe darse su raíz cuadrada?

9. Calcular la densidad de flujo radiativo E emitido por un cuerpo negro a $T = (300 \pm 1)$ K sabiendo que $E = \sigma T^4$ y que $\sigma = (5{,}67 \pm 0{,}01) \cdot 10^{-8}\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$. Repetir el cálculo para $\sigma = (5{,}6703 \pm 0{,}0007) \cdot 10^{-8}\mathrm{Wm^{-2}K^{-4}}$, ¿qué diferencias hay entre los dos resultados?

10. Sean las magnitudes $x = (6{,}2 \pm 0{,}2)$ Unidades, $y = (1{,}8 \pm 0{,}3)$ Unidades y $z = (3{,}2 \pm 0{,}1)$, siendo z una magnitud adimensional. Exprese correctamente las magnitudes anteriores y determine el valor y el error de las siguientes magnitudes indirectas: a) $f_1 = \frac{zx^2 + 2xyz}{y^3}$; b) $f_2 = xy \ln z$.

11. Al llevar a cabo cierto experimento con un aparato de sensibilidad (0,007s) se obtuvieron los valores siguientes (según el orden en que se proporcionan los datos): {7,379, 7,439, 7,244, 6,875, 7,291, 7,203, 7,453, 6,844, 7,468, 7,550} (s). Determine el resultado del experimento con un 80 % de confianza tomando las tres primeras medidas y con un 90 % usando las cincos primeras. Compare los resultados.

12. Con los datos del ejercicio anterior, determine el resultado experimental con un 95 % de confianza tomando las tres primeras medidas, las cinco primeras y todas. Compare los resultados.

13. Expresar adecuadamente la densidad de un líquido y su incertidumbre con un 80 % y un 95 % de confianza, a partir de las siguientes medidas: {1,265, 1,258, 1,264, 1,273, 1,263, 1,261}(g cm^{-3}).

14. Como es conocido, el módulo del campo eléctrico producido por una carga eléctrica positiva viene dado por la expresión $E = kq/r^2$, donde r es la distancia que hay desde la carga eléctrica hasta el punto donde se calcula el campo y $k = 8{,}99 \cdot 10^9$N m^{2}C^{-2} es la constante de Coulomb. En la siguiente tabla se dan los datos obtenidos de un experimento en el que se midió el campo eléctrico en puntos situados a diferentes distancias de la carga:

r(m)	$0{,}3 \pm 0{,}1$	$0{,}4 \pm 0{,}1$	$0{,}7 \pm 0{,}1$	$1{,}1 \pm 0{,}1$
E(N/C)	$(6{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^5$	$(3{,}7 \pm 0{,}2) \cdot 10^5$	$(1{,}4 \pm 0{,}2) \cdot 10^5$	$(0{,}5 \pm 0{,}2) \cdot 10^5$

Obtenga el valor de la carga con su error (para ello realice el ajuste por mínimos cuadrados). Comente e interprete la validez de los resultados.

15. Un recipiente que contiene hidrógeno se introduce en un baño cuya temperatura se puede variar con un termostato. Para los diferentes valores de la temperatura del termostato se ajusta la presión de forma que el volumen permanezca constante, obteniéndose los siguientes valores:

$(T \pm 0{,}1)$(°C)	10,0	15,0	20,0	35,0	30,0	35,0	40,0	45,0	50,0
$(P \pm 0{,}1)$(mmHg)	79,2	80,7	82,0	83,5	84,6	86,3	87,7	89,2	90,4

Sabiendo que el hidrógeno cumple con la ley de Gay-Lussac $\frac{P}{T}$ = constante y utilizando un ajuste por mínimos cuadrados, obténgase el cero absoluto de temperatura (valor para el que la presión es cero) con su error. Indicar la calidad del ajuste.

16. En un experimento de laboratorio en el que se pretende determinar la constante elástica k de un muelle se ha obtenido la siguiente tabla de datos para el tiempo que tarda el resorte en realizar 20 oscilaciones:

$(M \pm 0{,}1)$(g)	50,4	100,8	151,2	201,6	252,0	302,4
$(t \pm 0{,}01)$(s)	8,97	12,31	14,81	17,03	19,00	20,72

Se debe tener en cuenta que el experimento es real por lo que el muelle tiene masa (m) y por tanto una fracción f de ella interviene en el movimiento. Así el periodo del resorte es teóricamente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M + fm}{k}}$$

A partir de los datos y de esta ecuación, hallar la constante elástica del muelle a través de la correspondiente regresión lineal, utilizando el método de mínimos cuadrados. Sabiendo que la masa del muelle es 22,5 g hallar la fracción de esta masa que interviene en el movimiento. El error de las masas corresponderá a la mínima sensibilidad de la báscula.

17. En la tabla siguiente se muestran los resultados de las medidas de las magnitudes X e Y:

($X \pm$ error)(Unidades)	1,6	2,5	4,0	6,3	10	16	25	40	63	100
($Y \pm$ error)(Unidades)	6,9	9,5	13,2	18,2	25	35	48	66	91	126

Utilizando regresiones lineales y el método de mínimos cuadrados, ajuste estos datos a las dependencias $Y = aX + b$ e $Y = aX^b$, discuta la calidad de ambos ajustes.

12. Apéndice

En este apéndice se explica más en profundidad el tratamiento estadístico de los errores aleatorios que se presentan en las medidas.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la aparición de errores en los procesos de medidas es inevitable y suele ser el resultado de diversos factores. Por ejemplo, cuando se miden las oscilaciones de un péndulo con un cronómetro, la persona que toma la medida observa la oscilación, juzga cuándo el péndulo ha alcanzado un extremo de su movimiento, aprieta el botón para comenzar la medida, parando el cronómetro cuando vuelve a juzgar que el péndulo ha vuelto a la misma posición extrema. Si se repite este proceso varias veces, la lectura del cronómetro será distinta en las distintas medidas, lo que se debe a que existen procesos durante la medida (como el de juzgar que el péndulo ha llegado a un punto extremo o el de dar la orden al dedo de pulsar) que son de carácter aleatorio.

El proceso de medida de una magnitud física, por tanto, no proporciona un número (no tiene un valor concreto), sino que produce una variable aleatoria. Esto implica que sólo se puede disponer de *probabilidades* de encontrar el valor de una medida en un rango determinado. Esta falta de determinismo ha estado siempre presente en el desarrollo de la ciencia y ha sido estudiada ampliamente por la estadística.

Los errores aleatorios que aparecen en las medidas suelen ser la suma de muchos procesos aleatorios que introducen error (errores en los aparatos eléctricos, errores en el observador, etc.), cada uno con ciertas características desconocidas. Sin embargo, uno de los teoremas fundamentales de la estadística, el *teorema central del límite*, afirma que la suma de muchos procesos aleatorios dan lugar a otro proceso muy característico que se llama proceso o variable aleatoria *gaussiana* o *normal*. En una variable aleatoria normal x, la probabilidad de que una realización al azar de la variable produzca una valor menor que una cierta cantidad x_0 es:

$$P(x \leq x_0) = F(x_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \tag{18}$$

donde μ es la media y σ^2 la varianza de la variable x. Esta función $F(x)$ se conoce como función *distribución de probabilidad* y caracteriza totalmente la variable aleatoria. Otra forma de caracterizar la variable es con la función *densidad de probabilidad* $f(x)$ que se define como:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{19}$$

de forma que $f(x)dx$ representa la probabilidad de encontrar un valor en el intervalo $[x, x+dx]$. En la Figura 3 se representa la función densidad de probabilidad gaussiana, donde puede observarse la desviación típica (la raíz cuadrada de la varianza) que se corresponde con el ancho de la gaussiana, es decir con su dispersión.

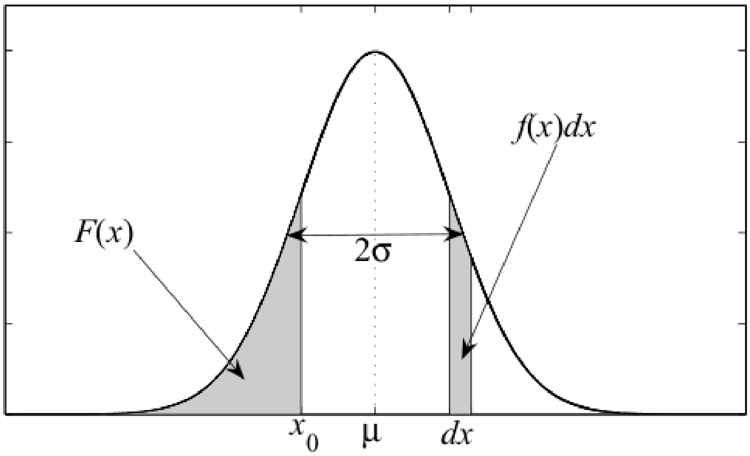

Figura 3: Distribución gaussiana

Cuando se realiza una medida física, lo que se obtiene es una variable aleatoria, que se supone normal y cuya media μ es el valor real de la magnitud física, es decir, el número que se obtendría si no hubiese error. Por tanto, lo que se persigue con la teoría de errores es obtener el número μ de la forma más aproximada posible a partir de realizaciones de la variable aleatoria, es decir, a partir de medidas.

La variables gaussianas tienen la interesante propiedad de que la suma de procesos gaussianos es a su vez un proceso gaussiano, por lo que la media de varias medidas $\bar{x}$, que se definía como $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$, es una variable aleatoria gaussiana, con la misma media μ que x pero con varianza σ^2/N. Es decir, al medir varias veces una misma magnitud y promediar se consigue reducir la varianza, lo que implica disminuir la incertidumbre y con ello se puede acotar el valor real de la magnitud física que se quiere medir dentro de un intervalo menor.

Como se conoce la función distribución de probabilidad del error, se podría dar un valor concreto para el intervalo de confianza, dada una probabilidad p de que el valor real se encuentre en el intervalo. La variable $u = \bar{x} - \mu$ es gaussiana de media cero y con varianza σ^2/N, por tanto la probabilidad de que un valor se encuentre en el intervalo $[-a, a]$ se puede notar como $P(-a \leq \bar{x} - \mu \leq a)$ y resulta:

$$P(-a \leq \bar{x} - \mu \leq a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{s\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \tag{20}$$

y como se cumple que:

$$P(-a \leq \bar{x} - \mu \leq a) = P(x - a \leq \mu \leq x + a) \tag{21}$$

se puede calcular la probabilidad de que la media μ (que es desconocida) se encuentre en un determinado intervalo, sin más que hacer la integral. Lo contrario también es posible, es decir, para una probabilidad p, encontrar el intervalo de confianza para que la media se encuentre en él con dicha probabilidad. Si la probabilidad se nota como $p = 1 - \delta$, se tiene $P(-a \leq \bar{x} - \mu \leq a) = 1 - \delta$. Utilizando propiedades de las probabilidades se tiene:

$$P(-a \leq \bar{x} - \mu \leq a) = P(u < a) - P(u < -a) = \tag{22}$$

$$P(u < a) - (1 - P(u > -a)) = 2P(u < a) - 1 = 1 - \delta \tag{23}$$

donde se ha utilizado que la distribución gaussian es simétrica. Por tanto, se tiene que $P(u < a) = 1 - \frac{\delta}{2}$, lo que implica que a es lo que se conoce como el *cuantil* $1 - \frac{\delta}{2}$, es decir el número tal que la probabilidad de que la variable gaussian sea menor que él es igual a $1 - \frac{\delta}{2}$. Los cuantiles de las distribuciones más comunes están tabulados, por lo que sólo sería necesario recurrir a la tabla para encontrar el valor de a que produce un intervalo de confianza con la probabilidad $p = 1 - \delta$ deseada.

El problema es que la varianza σ^2 de la distribución tampoco se conoce a priori y sólo se puede estimar a partir de los datos. Si los datos que se toman son muchos (del orden de cincuenta o más), tomar como valor de σ^2 el valor estimado a partir de los datos apenas produce errores, pero este número de medidas es a menudo demasiado grande en situaciones prácticas (como es el caso de un laboratorio docente).

El problema con pocas medidas se soluciona utilizando el estimador de la desviación típica $s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$, que es la raíz cuadrada de la varianza. Si se forma una nueva variable aleatoria como $u = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{N}}{s_x}$, no es difícil comprobar que se distribuye según una distribución conocida, llamada *t-Student* con $N - 1$ grados de libertad, sin ningún parámetro desconocido. En este caso:

$$P(-a \leq \frac{\sqrt{N}(\bar{x} - \mu)}{s_x} \leq a) = P(\bar{x} - a\frac{s_x}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + a\frac{S}{\sqrt{N}}) \tag{24}$$

por lo que es posible encontrar la probabilidad de que la media μ desconocida se encuentre en un determinado intervalo, sin más que integral la función distribución de probabilidad de la t-Student con $N - 1$ grados de libertad en dicho intervalo.

Al igual que en el caso de la distribución gaussiana, lo contrario también es posible. Repitiendo el proceso se encuentra que dada una probabilidad $p = 1 - \delta$, el intervalo de confianza de la media μ para esa probabilidad sería $[\bar{x} - a\frac{S}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + a\frac{S}{\sqrt{N}}]$, donde a es el cuantil $1 - \frac{\delta}{2}$ de la distribución t-Student con $N - 1$ grados de libertad.

	Probabilidad acumulada $P(u < a)$									
$N - 1$	0,700	0,750	0,800	0,850	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995	0,9975
1	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3
2	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09
3	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453
4	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598
5	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773
6	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317
7	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029
8	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833
9	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690
10	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581

Cuadro 2: Cuantiles de la distribución t-Student

En el cuadro 2, se presentan los percentiles para la distribución t-Student para varios grados de libertad y varias probabilidades.

A modo de ejemplo, imagínese que se toman tres medidas ($N = 3$) y se pretende construir el intervalo de confianza con una probabilidad del 80 %. En ese caso $p = 0{,}8 = 1 - \delta$, por lo que

$\delta = 0{,}2$. El cuantil que se busca es para el caso $P(u < a) \leq 1 - \frac{\delta}{2}$, por lo que hay que buscar en la columna $P(u < a) = 0{,}9$, que es la quinta columna (sin contar la columna de valores de $N - 1$). Como se han tomado tres medidas $N - 1 = 2$, que corresponde a la segunda fila. El elemento en la fila $N - 1 = 2$ y la columna $P(u < a) = 0{,}9$ es 1,886, lo que significa que el cuantil 0,9 de la distribución t-Student con 2 grados de libertad es 1,886, o lo que es lo mismo, que la probabilidad de encontrar un valor igual o menor a 1,886 en una variable aleatoria con una distribución t-Student con 2 grados de libertad es del 90 %. El intervalo de confianza en este ejemplo quedaría:

$$[\bar{x} - 1{,}886\frac{S}{\sqrt{3}}, \bar{x} + 1{,}886\frac{S}{\sqrt{3}}] = [\bar{x} - 1{,}0889S, \bar{x} + 1{,}0889S] \tag{25}$$

con una probabilidad del 80 %, lo que se puede aproximar por $[\bar{x} - 1{,}089S, \bar{x} + 1{,}089S]$, tal y como se explicó en la sección 6.

Este procedimiento se puede hacer para cualquier N o cualquier p que se desee, con tal de que aparezca en la tabla. Existen tablas mucho más completas en cualquier libro de estadística, en caso de que se necesiten.