Universidad de Granada
Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores

TEMA 1

Fundamentos de diseño digital

Electrónica Digital

Grado Ing. Tecnologías Telecomunicación

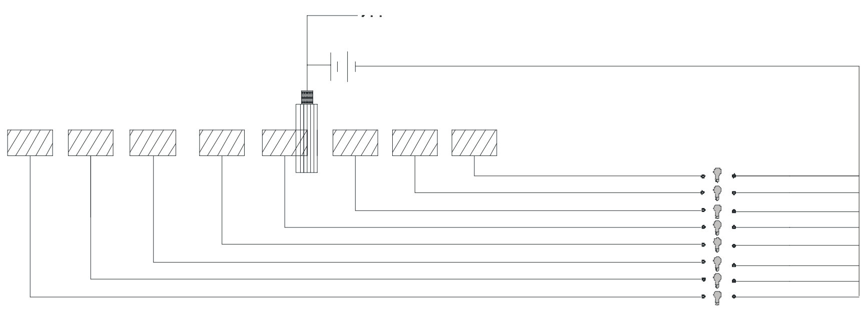
Sumario

- Introducción
- Álgebra de Boole
  - Postulados
  - Álgebra de Boole de dos elementos
  - Teoremas del álgebra de Boole
- Síntesis y minimización de funciones lógicas
  - Funciones y circuitos de conmutación
  - *Minterms* y *maxterms*: adyacencias
  - Mapas de Karnaugh
  - Minimización

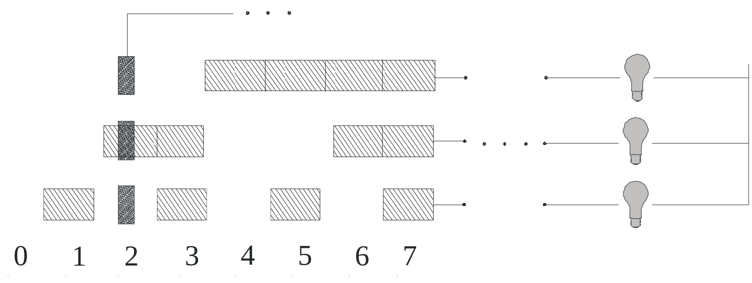
Introducción

- **Sistema digital:** sistema en el que se genera, almacena, procesa y/o transmite información representada por señales digitales.
- **Señal digital:** señal limitada a tomar valores discretos determinados.
- **Bit:** cantidad mínima de información (0/1).

Introducción



Introducción



Introducción

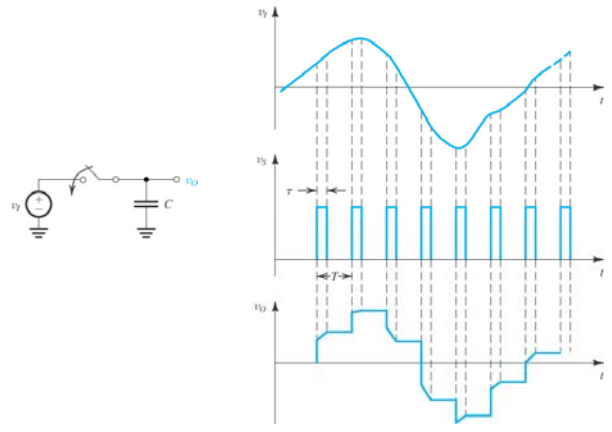
- La mayoría de señales físicas corresponden al dominio analógico.
- A medida que aumentan las prestaciones de los sistemas digitales, el procesamiento digital de señales va ganando terreno al procesamiento analógico.
- Los sistemas digitales de procesamiento:
  - ✓ han de captar la información del mundo real a partir de señales analógicas
  - ✓ en muchas ocasiones, han de transformar su salida al dominio analógico para interactuar con el exterior
- Son necesarios circuitos que proporcionen una interfaz adecuada entre los mundos analógico y digital.

Muestreo y retención

- Para la conversión de una señal analógica a un valor digital, el paso previo es el muestreo de dicha señal:
  - ✓ el valor analógico de la señal ha de almacenarse (**muestreo**)
  - ✓ el valor de la muestra ha de permanecer constante (**retención**) durante el tiempo necesario para realizar la conversión
  - ✓ este proceso se repite periódica y continuamente
- Los circuitos que realizan esta labor reciben el nombre de circuitos de ***sample-and-hold*** (S/H).
- El **teorema del muestreo** establece que la frecuencia de muestreo ha de ser, al menos, el doble de la máxima componente en frecuencia de la señal a muestrear.

Muestreo y retención

- Los circuitos que realizan esta labor reciben el nombre de circuitos de ***sample-and-hold*** (S/H).



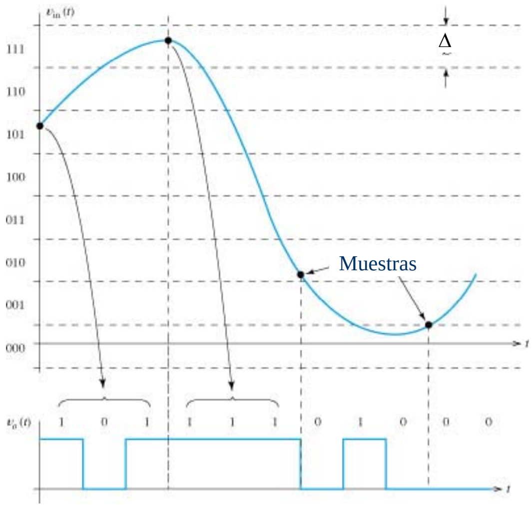
Cuantificación y error

- Una de las principales diferencias entre el mundo analógico y el digital es la diferente precisión:
  - ✓ una señal analógica puede tomar cualquier valor entre los límites máximo y mínimo de su rango dinámico
  - ✓ por el contrario, una señal digital (o información representada en formato digital) está limitada a un número finito de valores
- Tras el muestreo y la retención, se realiza la **cuantificación**, proceso en el que la muestra analógica se hace corresponder con un valor digital.
- La diferencia de precisión entre lo analógico y lo digital se traduce en que el proceso de cuantificación introduce un error.

Cuantificación y error

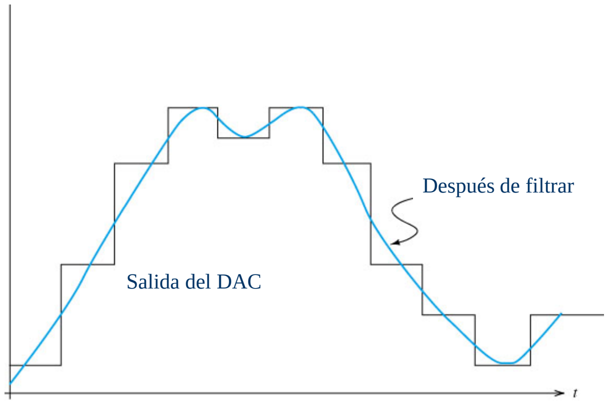
- El error de cuantificación está relacionado con el concepto de **resolución:**
  - ✓ diferencia mínima de tensión entre dos muestras que hace que sus salidas digitales sean distintas.

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{2^n - 1}$$



Cuantificación y error

- Esta precisión limitada también se refleja en la conversión digital-analógica.



Álgebra de Boole

- Estructura matemática definida a partir de:
  - conjunto de elementos ***B***
    - en ***B*** existe una relación de equivalencia (=) para la que se verifica el **principio de sustitución**
  - operadores
    - **binarios** (se aplican a dos elementos de ***B***)
    - para los que ***B*** es **cerrado** (se obtiene otro elemento de ***B***)
  - postulados de Huntington

Álgebra de Boole

- Estructura matemática definida a partir de:
  - postulados de Huntington
    - leyes de composición interna (OR, AND)

$$\forall\, x, y \in B \quad \begin{cases} x + y \in B \\ x \cdot y \in B \end{cases}$$

    - elementos neutros

$$\exists\; 0 \in B \mid \forall\, x \in B \;\; x + 0 = 0 + x = x$$
$$\exists\; 1 \in B \mid \forall\, x \in B \;\; x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

Álgebra de Boole

- Estructura matemática definida a partir de:
  - postulados de Huntington
    - conmutatividad de las leyes de composición interna

$$\forall\, x, y \in B \quad \begin{cases} x + y = y + x \\ x \cdot y = y \cdot x \end{cases}$$

    - distributividad de las leyes de composición interna

$$\forall\, x, y, z \in B \quad \begin{cases} x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z) \\ x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \end{cases}$$

Álgebra de Boole

- Estructura matemática definida a partir de:
  - postulados de Huntington
    - elemento opuesto

$$\forall\, x \in B \;\; \exists\, \bar{x} \in B \mid \begin{cases} x + \bar{x} = 1 \\ x \cdot \bar{x} = 0 \end{cases}$$

    - número de elementos

$$\exists\, x, y \in B \mid x \neq y$$

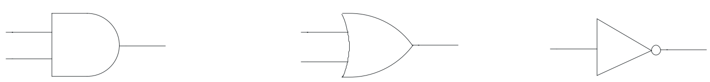
Álgebra de Boole

- Álgebra de Boole de dos elementos $\boldsymbol{B}_2$
  - $\boldsymbol{B}=\{0, 1\}$
  - operadores

AND	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

OR	**0**	**1**
0	0	1
1	1	1

	NOT
0	1
1	0



Álgebra de Boole

- Teoremas del álgebra de Boole
  - **Teorema 1:** el elemento neutro para la suma (0) es único; el elemento neutro para el producto (1) es único.
  - **Teorema 2:** $\forall\, x \in \boldsymbol{B}\ x+1=1,\ x\cdot 0=0$
  - **Teorema 3:** los elementos 0 y 1 son distintos y cada uno de ellos es el complemento del otro.
  - **Teorema 4:** $\forall\, x \in \boldsymbol{B}\ x+x=x,\ x\cdot x=x$
  - **Teorema 5:** el complemento de cada elemento es único.
  - **Teorema 6:** el complemento del complemento de cada elemento es el propio elemento.

Álgebra de Boole

- Teoremas del álgebra de Boole
  - **Teorema 7:** $\forall\, x,y \in \boldsymbol{B}\ x+x\cdot y=x,\ x\cdot(x+y)=x$
  - **Teorema 8:** $\forall\, x,y,z \in \boldsymbol{B}\ x+[(x\cdot y)\cdot z]=x,\ x\cdot[(x+y)+z]=x$
  - **Teorema 9:** las leyes de composición interna son asociativas:

$$\forall\, x,y,z \in \boldsymbol{B}\ x+(y+z)=(x+y)+z,\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$$

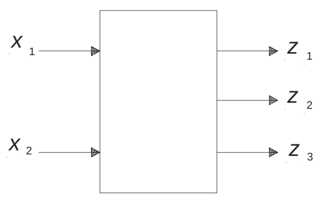
  - **Teorema 10:** $\forall\, x,y \in \boldsymbol{B}\ x+\overline{x}\cdot y=x+y,\ x\cdot(\overline{x}+y)=x\cdot y$
  - **Teorema 11:** $\forall\, x,y \in \boldsymbol{B}\ \overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y},\ \overline{x\cdot y}=\overline{x}+\overline{y}$
  - Teorema 11: leyes de De Morgan.

Sumario

- Introducción
- Álgebra de Boole
  - ✓ Postulados
  - ✓ Álgebra de Boole de dos elementos
  - ✓ Teoremas del álgebra de Boole
- Síntesis y minimización de funciones lógicas
  - ✓ Funciones y circuitos de conmutación
  - ✓ *Minterms* y *maxterms*: adyacencias
  - ✓ Mapas de Karnaugh
  - ✓ Minimización

Circuitos de conmutación

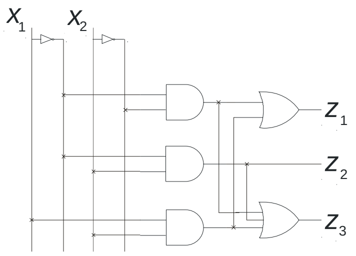
- **Circuito de conmutación (digital):** cualquier sistema mecánico, eléctrico, etc., con entradas y salidas digitales (binarias).



x_1	x_2	z_1	z_2	z_3
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Circuitos de conmutación

- **Circuito de conmutación (digital):** cualquier sistema mecánico, eléctrico, etc., con entradas y salidas digitales (binarias).



x_1	x_2	z_1	z_2	z_3
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

Circuitos de conmutación

- **Variables de conmutación:** entradas y salidas individuales de un circuito de conmutación.
- **Símbolo de entrada (salida):** *n* (*m*)-tupla ordenada sobre el conjunto de variables de entrada (salida).
- Todos los símbolos de entrada (salida) forman el **alfabeto de entrada (salida)**.
- En los sistemas digitales, tanto los alfabetos de entrada y salida son finitos (diferencia fundamental con los sistemas analógicos).

Funciones de conmutación

- Matemáticamente, un circuito de conmutación establece una aplicación entre el alfabeto de entrada y el alfabeto de salida.
- **Función de conmutación:** aplicación entre el conjunto producto cartesiano $\{0,1\}^n$ y el conjunto $\{0,1\}$.
- Funciones de conmutación de una variable:

$$f_0(x)=0 \qquad f_1(x)=x \qquad f_2(x)=\overline{x} \qquad f_3(x)=1$$

Funciones de conmutación

- Funciones de conmutación de dos variables:
  - ✓ Función nula y función unidad:

$$f_0(x,y)=0 \qquad f_{15}(x,y)=1$$

  - ✓ Funciones de transferencia y de complementación:

$$f_3(x,y)=x \qquad f_5(x,y)=y \qquad f_{12}(x,y)=\overline{x} \qquad f_{10}(x,y)=\overline{y}$$

  - ✓ Funciones con la operación AND:

$$f_1(x,y)=xy \qquad f_2(x,y)=\overline{x}y \qquad f_4(x,y)=x\overline{y} \qquad f_8(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{x+y}$$

Funciones de conmutación

- Funciones de conmutación de dos variables:
  - ✓ Funciones con la operación OR:

$f_1(x,y)=x+y \qquad f_{11}(x,y)=\overline{x}+y \qquad f_{13}(x,y)=x+\overline{y} \qquad f_{14}(x,y)=\overline{x}+\overline{y}=\overline{xy}$

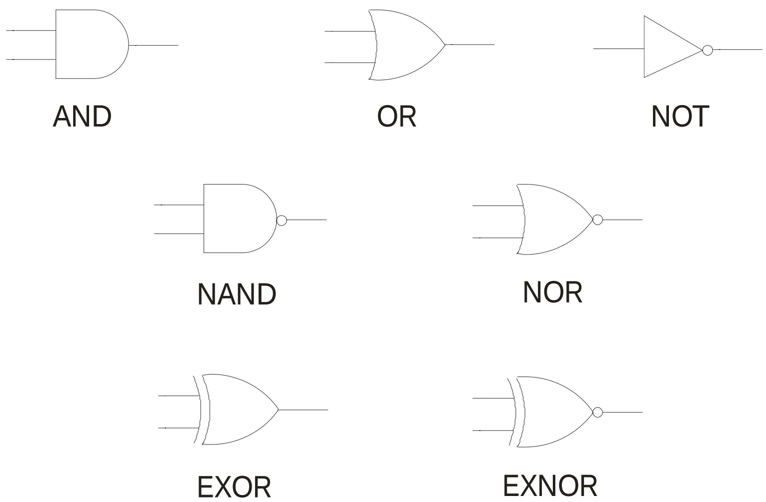
  - ✓ Función Exclusive-OR (EXOR):

$$f_6(x,y)=\bar{x}y+x\bar{y}=x\oplus y$$

  - ✓ Función Exclusive-NOR (EXNOR)

$$f_9(x,y)=xy+\bar{x}\bar{y}=x\odot y$$

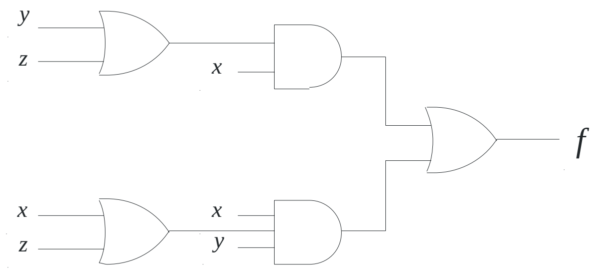
Funciones de conmutación



Funciones de conmutación

- Dada una función de conmutación cualquiera es inmediato obtener un circuito que la sintetice:

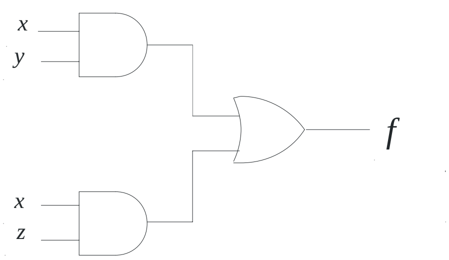
$$f(x,y,z)=x(y+z)+xy(x+z)$$



Funciones de conmutación

- Aplicando los teoremas y postulados del álgebra de Boole:

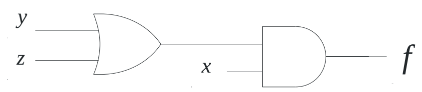
$$f(x,y,z)=xy+xz$$



Funciones de conmutación

- Finalmente:

$$f(x,y,z)=x(y+z)$$



Minterms y *maxterms*

- **Término producto:** variables de conmutación conectadas por el operador AND: $xxyz$
- **Término suma:** variables de conmutación conectadas por el operador OR: $x+y+z$
- **Término normal:** término producto o suma en el que no aparece dos veces la misma variable (en cualquiera de sus formas)

$\bar{x}xyz$ (no normal) xyz (normal)

Minterms y *maxterms*

- Dado un conjunto de variables $x_1,\ldots,x_n$
  - ✓ ***Minterm* (término mínimo o producto canónico):** cualquier término producto normal en el que aparecen todas las variables $x_1,\ldots, x_n$
  - ✓ Como función de conmutación de n variables, cada *minterm* asigna el valor 1 a uno y sólo uno de los símbolos del alfabeto de entrada

x	y	$x\bar{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Minterms y *maxterms*

- Dado un conjunto de variables $x_1,\ldots,x_n$
  - ✓ ***Maxterm* (término máximo o suma canónica):** cualquier término suma normal en el que aparecen todas las variables $x_1,\ldots,x_n$
  - ✓ Como función de conmutación de n variables, cada *maxterm* asigna el valor 0 a uno y sólo uno de los símbolos del alfabeto de entrada

x	y	$\bar{x}+y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Minterms y *maxterms*

- Dado un conjunto n de variables $x_1,\ldots,x_n$ existen 2^n *minterms* y 2^n *maxterms* posibles

  - ✓ Representación vectorial para los *minterms*: 0 para la variable complementada y 1 para la variable sin complementar
  - ✓ Representación vectorial para los *maxterms*: 1 para la variable complementada y 0 para la variable sin complementar

$x\,y\,z$	*Minterms*	*Maxterms*
000	$\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$	$x+y+z$
001	$\bar{x}\,\bar{y}\,z$	$x+y+\bar{z}$
010	$\bar{x}\,y\,\bar{z}$	$x+\bar{y}+z$
011	$\bar{x}\,y\,z$	$x+\bar{y}+\bar{z}$
100	$x\,\bar{y}\,\bar{z}$	$\bar{x}+y+z$
101	$x\,\bar{y}\,z$	$\bar{x}+y+\bar{z}$
110	$x\,y\,\bar{z}$	$\bar{x}+\bar{y}+z$
111	$x\,y\,z$	$\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$

Minterms y *maxterms*

- Dado un conjunto n de variables $x_1,\ldots,x_n$ existen 2^n *minterms* y 2^n *maxterms* posibles

	$x\,y\,z$	m_2	m_5	M_3	M_6
0	000	0	0	1	1
1	001	0	0	1	1
2	010	1	0	1	1
3	011	0	0	0	1
4	100	0	0	1	1
5	101	0	1	1	1
6	110	0	0	1	0
7	111	0	0	1	1

Desarrollo de Shannon

- Cualquier función de n variables puede obtenerse como suma de *minterms* o producto de *maxterms*.

- En el caso más sencillo de una sola variable:

$$f(x)=\overline{x}\cdot f(0)+x\cdot f(1)$$

- Para n variables:

$$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=\overline{x_i}\cdot F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)+x_i\cdot F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n)$$

Desarrollo de Shannon

- **Teorema de Shannon (primera forma):** toda función de conmutación puede expresarse como suma única de *minterms*.

  Demostración: dada $F(x_1,\ldots, x_n)$, según lo anterior:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=\overline{x_1}\cdot F(0,\ldots,x_n)+x_1\cdot F(1,\ldots,x_n)=$$
$$=\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot F(0,0,\ldots,x_n)+\overline{x_1}\cdot x_2\cdot F(0,1,\ldots,x_n)+$$
$$+x_1\cdot\overline{x_2}\cdot F(1,0,\ldots,x_n)+x_1\cdot x_2\cdot F(1,1,\ldots,x_n)=\ldots$$
$$\ldots=\overline{x_1}\cdot\ldots\cdot\overline{x_n}\cdot F(0,0,\ldots,0)+\ldots+x_1\cdot\ldots\cdot x_n\cdot F(1,1,\ldots,1)$$

Desarrollo de Shannon

- $f(x,y,z,u)=\Sigma m(0,2,3,6,9,12,15)$

$$=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{u}+\bar{x}\bar{y}zu+\bar{x}yz\bar{u}+x\bar{y}\bar{z}u+xy\bar{z}\bar{u}+xyzu$$

	x y z u	f		x y z u	f
0	0000	1	8	1000	0
1	0001	0	9	1001	1
2	0010	1	10	1010	0
3	0011	1	11	1011	0
4	0100	0	12	1100	1
5	0101	0	13	1101	0
6	0110	1	14	1110	0
7	0111	0	15	1111	1

Desarrollo de Shannon

- Cualquier función de n variables puede obtenerse como suma de *minterms* o producto de *maxterms*.

- En el caso más sencillo de una sola variable:

$$f(x)=[x+f(0)]\cdot[\bar{x}+f(1)]$$

- Para n variables:

$$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=[x_i+F(x_1,\ldots,0,\ldots,x_n)]\cdot[\bar{x}_i+F(x_1,\ldots,1,\ldots,x_n)]$$

Desarrollo de Shannon

- **Teorema de Shannon (segunda forma):** toda función de conmutación puede expresarse como producto único de *maxterms*.

  Demostración: dada $F(x_1,\ldots, x_n)$, según lo anterior:

$$F(x_1,\ldots,x_n)=[x_1+F(0,\ldots,x_n)]\cdot[\overline{x_1}\cdot F(1,\ldots,x_n)]=$$

$$= [x_1+x_2+F(0,0,\ldots,x_n)]\cdot[x_1+\overline{x_2}+F(0,1,\ldots,x_n)]\cdot$$

$$\cdot[\overline{x_1}+x_2+F(1,0,\ldots,x_n)]\cdot[\overline{x_1}+\overline{x_2}+F(1,1,\ldots,x_n)]=\ldots$$

$$\ldots= [x_1+\ldots+x_n+F(0,0,\ldots,0)]\cdot\ldots\cdot[\overline{x_1}+\ldots+\overline{x_n}+F(1,1,\ldots,1)]$$

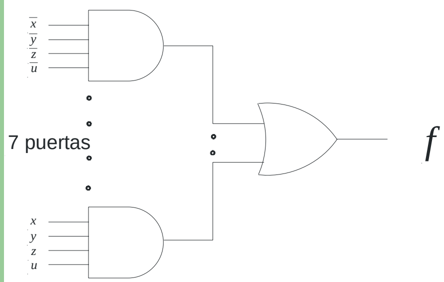
Desarrollo de Shannon

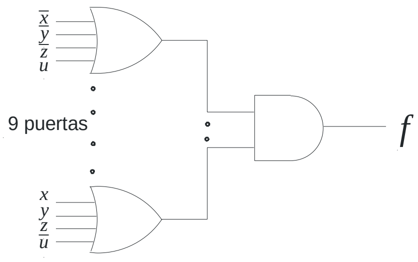
- $f(x,y,z,u)=\prod M(1,4,5,7,8,10,11,13,14)=(x+y+z+\bar{u})(x+\bar{y}+z+u)(x+\bar{y}+z+\bar{u})\cdot$
  $\cdot(x+\bar{y}+\bar{z}+\bar{u})(\bar{x}+y+z+u)(\bar{x}+y+\bar{z}+u)(\bar{x}+y+\bar{z}+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+z+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}+u)$

	x y z u	***f***		***x y z u***	***f***
0	0000	1	8	1000	0
1	0001	0	9	1001	1
2	0010	1	10	1010	0
3	0011	1	11	1011	0
4	0100	0	12	1100	1
5	0101	0	13	1101	0
6	0110	1	14	1110	0
7	0111	0	15	1111	1

Desarrollo de Shannon

- $f(x,y,z,u) = \Sigma m(0,2,3,6,9,12,15) = \prod M(1,4,5,7,8,10,11,13,14)$





Adyacencias

- **Adyacencia:** término producto en el que no aparecen todas las variables involucradas en una determinada función.
- **Índice de un *minterm*:** número de unos en la representación vectorial de dicho *minterm*.
- 2 *minterms* de las mismas variables forman una **adyacencia de primer orden** si ambos contienen las mismas variables salvo en una posición

$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{u} = \bar{x}\bar{y}\bar{u}$ 0000+0010=00-0

Por tanto, es necesario que sus índices difieran en 1 para formar una **adyacencia de primer orden**.

Adyacencias

- 2 adyacencias de primer orden forman una **adyacencia de segundo orden** si ambas contienen las mismas variables salvo en una posición

  $\bar{x}\bar{y}\bar{u}+\bar{x}y\bar{u}=\bar{x}\bar{u}$ 00-0+01-0=0--0

- Dada una función como suma de *minterms*, las adyacencias puede emplearse para simplificar su realización

  $f(x,y,z,u)=\Sigma m(0,2,4,6,9,13,15)$

  $=\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{y}z\bar{u}+\bar{x}y\bar{z}\bar{u}+\bar{x}yz\bar{u}+x\bar{y}\bar{z}u+xy\bar{z}u+xyzu=$

  $=\bar{x}\bar{y}\bar{u}+\bar{x}y\bar{u}+x\bar{z}u+xyu=\bar{x}\bar{u}+x\bar{z}u+xyu$

Funciones incompletamente especificadas

- Se habla de **funciones incompletamente especificadas** cuando es **indiferente** la salida que se asigne a ciertos símbolos de entrada (símbolos que nunca se van a presentar, no son posibles, etc.).

$f(x,y,z,u)=\Sigma m(2,3,4,7,8,12,14) + d(0,13,15)$

$f(x,y,z,u)=\prod M(1,5,6,9,11) \cdot d(0,13,15)$

	x y z u	*f*		*x y z u*	*f*
0	0000	-	8	1000	1
1	0001	0	9	1001	0
2	0010	1	10	1010	0
3	0011	1	11	1011	0
4	0100	1	12	1100	1
5	0101	0	13	1101	-
6	0110	0	14	1110	1
7	0111	1	15	1111	-

Mapas de Karnaugh

- Existen diferentes maneras de representar funciones de conmutación:
  - ✓ tablas verdad
  - ✓ expresiones algebraicas
  - ✓ suma de *minterms* o producto de *maxterms*
  - ✓ diagramas de Venn
  - ✓ hipercubos
  - ✓ mapas de Karnaugh

- **Mapas de Karnaugh:** representación ordenada de los diagramas de Venn, útiles para representación y minimización de funciones de pocas variables.

Mapas de Karnaugh

	$\bar{z}$	$\bar{z}$	z	z	
xy \ zu	00	01	11	10	
$\bar{x}$ 00	0	1	3	2	$\bar{y}$
$\bar{x}$ 01	4	5	7	6	y
x 11	12	13	15	14	y
x 10	8	9	11	10	$\bar{y}$
	$\bar{u}$	u	u	$\bar{u}$	

Mapas de Karnaugh

x \ y	0	1
0		
1		

x \ yz	00	01	11	10
0				
1				

xy \ zu	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

xy \ zuv	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Mapas de Karnaugh

- Representación de funciones de conmutación

$$f(x,y,z,u)=\Sigma m(2,3,4,6,8,12,14) + d(0,13,15)$$

xy \ zu	00	01	11	10
00	–		1	1
01	1			1
11	1	–	–	1
10	1			

Mapas de Karnaugh

- Síntesis de funciones de conmutación

xy \ zu	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11		1	1	
10		1		

$\bar{x}z$

yzu

xyu

$x\bar{z}u$

$f(x,y,z,u)=\bar{x}z+yzu+x\bar{z}u=$

$= \bar{x}z+xyu+x\bar{z}u$

Mapas de Karnaugh

- Síntesis de funciones de conmutación

xy \ zu	00	01	11	10
00	1	–	1	1
01	1			
11				
10		1	1	

$\bar{x}\bar{y}$

$\bar{x}\bar{z}\bar{u}$

$\bar{y}u$

$f(x,y,z,u)=\bar{x}\bar{y}+\bar{x}\bar{z}\bar{u}+\bar{y}u$

Mapas de Karnaugh

- Síntesis de funciones de conmutación
  - ✓ Identificar todas las adyacencias de mayor orden posible en el mapa de Karnaugh de la función
  - ✓ Todos los unos de la función han de estar incluidos en, al menos, una de las adyacencias
  - ✓ No es necesario incluir las indiferencias, pero pueden aprovecharse para identificar adyacencias de mayor orden
  - ✓ Utilizando las adyacencias identificadas, la función se puede expresar como suma de las mismas
- Para una realización mínima, es necesario incluir en primer lugar las **adyacencias esenciales** (incluyen algún 1 no cubierto por ninguna otra adyacencia)

Mapas de Karnaugh

- Síntesis de funciones de conmutación

xy \ zu	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11		1	1	
10		1		

$\bar{x}z$ **ESENCIAL**

yzu **NO ESENCIAL**

xyu **NO ESENCIAL**

$x\bar{z}u$ **ESENCIAL**

$$f(x,y,z,u)=\boldsymbol{\bar{x}z}+yzu+\boldsymbol{x\bar{z}u}=$$

$$=\boldsymbol{\bar{x}z}+xyu+\boldsymbol{x\bar{z}u}$$

Mapas de Karnaugh

- Síntesis de funciones de conmutación

$xy \backslash zu$	00	01	11	10
00		0		
01		0	0	
11	0	–		
10				

$x+z+\bar{u}$

$x+\bar{y}+\bar{u}$

$\bar{y}+z+\bar{u}$

$\bar{x}+\bar{y}+z$

$f(x,y,z,u)=(x+z+\bar{u})(x+\bar{y}+\bar{u})(\bar{x}+\bar{y}+z)$

Mapas de Karnaugh

- Síntesis multifuncional

$f(x,y,z,u)=\Sigma m(1,3,5,7,10,11,14,15)$

$xy \backslash zu$	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11			1	1
10			1	1

$g(x,y,z,u)=\Sigma m(1,5,10,12,13,14,15)$

$xy \backslash zu$	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	1	1	1	1
10				1

Mapas de Karnaugh

- Síntesis multifuncional

$f(x,y,z,u)=\Sigma m(1,3,5,7,10,11,14,15)$ $g(x,y,z,u)=\Sigma m(1,5,10,12,13,14,15)$

xy \ zu	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11			1	1
10			1	1

xy \ zu	00	01	11	10
00		1		
01		1		
11	1	1	1	1
10				1

Mapas de Karnaugh

- Síntesis incluyendo variables: los mapas de Karnaugh de n variables permiten trabajar con funciones de más de n variables

xy \ zu	00	01	11	10
00	–		1	1
01	1		1	
11	1	–	1	1
10	1			

x \ yz	00	01	11	10
0		1	u	$\bar{u}$
1	$\bar{u}$		1	1

x \ y	0	1
0	z	$\overline{z\oplus u}$
1	$\overline{z+u}$	1

Minimización

- Es importante implementar los sistemas digitales con el mínimo *hardware* posible:
  - ✓ velocidad
  - ✓ coste
  - ✓ consumo
  - ✓ capacidad de integración
- La síntesis de **realizaciones mínimas** con mapas de Karnaugh se hace muy compleja para funciones de 5 o más variables.
- Es necesario disponer de procedimientos para la síntesis mínima de funciones de conmutación.
- Estos procedimientos pueden emplearse en herramientas automáticas.

Minimización

- La realización mínima busca dos factores fundamentales:
  - ✓ velocidad: utilizando puertas de características similares, el circuito más rápido corresponderá al que incluya menos niveles lógicos
  - ✓ coste: el circuito de menor coste será aquel con menor número de puertas, y a igualdad de puertas, el que requiera menos conexiones
- Los procedimientos para la síntesis mínima con más de dos niveles son muy complejos, con lo que nos limitaremos a la síntesis con dos niveles (AND-OR y OR-AND).
- Para síntesis de dos niveles lógicos, la realización mínima se considerará la de menor coste, según la definición anterior.

Minimización (Quine-McCluskey)

- Procedimiento basado en la búsqueda sistemática de adyacencias de una función de conmutación:
  - ✓ **implicante:** *minterm* o adyacencia incluidos en una función (el que aquéllos valgan 1 para un cierto símbolo de entrada implica que la función también vale 1 para el mismo símbolo de entrada)
  - ✓ **implicantes primos:** implicante que no está incluido en ningún otro implicante de orden superior.
  - ✓ cualquier realización mínima de una función de conmutación sólo incluye implicantes primos.

Minimización (Quine-McCluskey)

- El procedimiento se resumen en:
  - ✓ se construye una tabla con los *minterms* que componen la función, agrupados por su índice, en la que se buscan todas las adyacencias posibles de primer orden, comparando el grupo de un índice con el siguiente
  - ✓ las adyacencias de primer orden se agrupan en una nueva tabla según su índice, buscándose así las adyacencias de segundo orden
  - ✓ este proceso se repite para las adyacencias de orden creciente, hasta llegar a las adyacencias del mayor orden posible
  - ✓ todas las adyacencias o *minterms* no incluidos en alguna otra de orden superior constituyen los **implicantes primos**
  - ✓ se construye una tabla de implicantes para seleccionar el mínimo número posible de implicantes primos que cubren todos los *minterms* de la función

Electrónica Digital – Fundamentos de diseño digital

Minimización (Quine-McCluskey)

- El procedimiento puede aplicarse a la síntesis de funciones incompletamente especificadas:
  - ✓ se realiza como se ha descrito anteriormente, pero incluyendo también las indiferencias en los *minterms* a cubrir
  - ✓ finalmente se descartan aquellos implicantes primos que únicamente cubran indiferencias de la función
- También puede aplicarse a la síntesis multifuncional (varias funciones aprovechan términos comunes en su implementación):
  - ✓ se realiza el procedimiento incluyendo todos los *minterms* implicados en las diferentes funciones
  - ✓ en la tabla de implicantes final se exige que se cubran los *minterms* para cada una de las funciones a sintetizar

Minimización (Quine-McCluskey)

- **Ejemplo:** $f(x,y,z,u)=\Sigma m(0,1,2,3,7,9,11,13,14)$

índice	minterm	
0	0	✓
1	1	✓
	2	✓
2	3	✓
	9	✓
3	7	✓
	11	✓
	13	✓
	14	e

0-1(1)	✓
0-2(2)	✓
1-3(2)	✓
1-9(8)	✓
2-3(1)	✓
3-7(4)	d
3-11(8)	✓
9-11(2)	✓
9-13(4)	c

0-1-2-3(1,2)	b
1-3-9-11(2,8)	a

Minimización (Quine-McCluskey)

- **Ejemplo:** $f(x,y,z,u)=\Sigma m(0,1,2,3,7,9,11,13,14)$

	✓ 0	✓ 1	✓ 2	✓ 3	✓ 7	✓ 9	✓ 11	✓ 13	✓ 14
✓ a		●		●		●	●		
✓ b	●	●	●	●					
✓ c						●		●	
✓ d				●	●				
✓ e									●

$f(x,y,z,u)=a+b+c+d+e=\bar{y}u+\bar{x}\bar{y}+x\bar{z}u+\bar{x}zu+xyz\bar{u}$