TITULAR JUNIO

EJERCICIO 5

a) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial? Justifique la respuesta.

Para responder la pregunta primero enunciaremos tres teoremas que relacionan energía y trabajo:

Según el Teorema de la Energía Cinética o de las fuerzas vivas:

El trabajo total de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula se invierte en variar su energía cinética.

$$W_{A\to B}^{F_T} = \int_A^B \overrightarrow{F_T} \cdot d\vec{r} = \left|\overrightarrow{F_T}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\alpha = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA}$$

Según el Teorema de la Energía Potencial o fuerzas conservativas:

El trabajo total de todas las fuerzas conservativas que actúan sobre una partícula se invierte en variar su energía potencial.

$$W_{A\to B}^{F_C} = \int_A^B \overrightarrow{F_C} \cdot d\vec{r} = \left|\overrightarrow{F_C}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\alpha = -(E_{PB} - E_{PA}) = -\Delta E_P$$

Según el Teorema de Conservación de la Energía Mecánica:

El trabajo total de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre una partícula se invierte en variar su energía mecánica.

$$W_{A\to B}^{F_{NC}} = \int_A^B \overrightarrow{F_{NC}} \cdot d\vec{r} = \left|\overrightarrow{F_{NC}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\alpha = E_{MB} - E_{MA} = \Delta E_M$$

Juntando las expresiones anteriores nos queda:

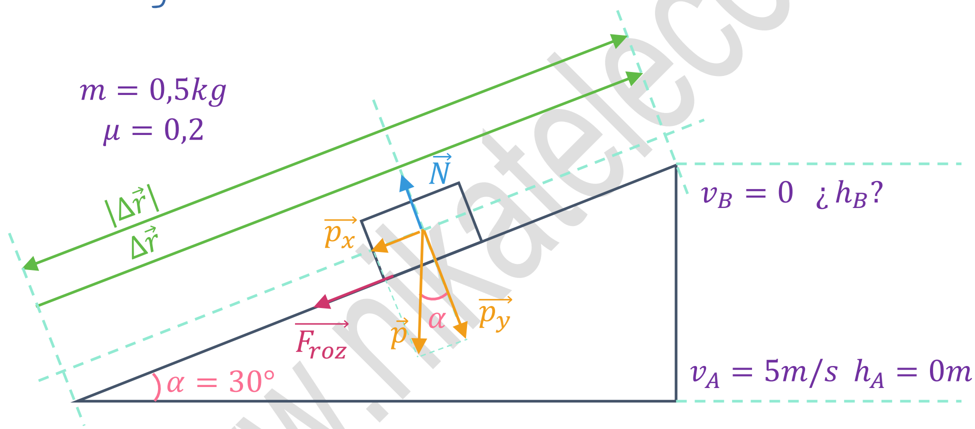
$$W_{A\to B}^{F_T} = W_{A\to B}^{F_C} + W_{A\to B}^{F_{NC}} \quad \rightarrow \quad \Delta E_C = -\Delta E_P + \Delta E_M$$

Así que $\Delta E_C = -\Delta E_P$ solo se cumplirá cuando $\Delta E_M = 0$, es decir, cuando $W_{A\to B}^{F_{NC}} = 0$, que se consigue cuando:

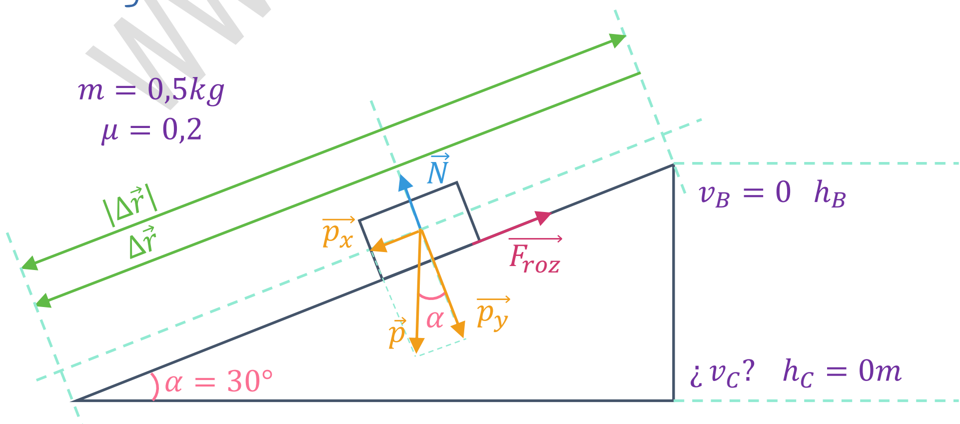
- No existan fuerzas no conservativas $|\overrightarrow{F_{NC}}| = 0$
- Cuando el desplazamiento asociado a ellas sea cero $|\Delta\vec{r}| = 0$
- Cuando $\overrightarrow{F_{NC}}$ y $\Delta\vec{r}$ formen $90°$ o $270°$ (sean perpendiculares entre sí) para que $\cos\alpha = 0$.

b) Un cuerpo de $0{,}5$ kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma $30°$ con la horizontal, con una velocidad inicial de $5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. El coeficiente de rozamiento es $0{,}2$. **i)** Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano. Determina, mediante consideraciones energéticas: **ii)** La altura máxima que alcanza el cuerpo. **iii)** La velocidad con la que vuelve al punto de partida. $g = 9{,}8\ m\,s^{-2}$.

i) Asciende. Diagrama de fuerzas:



Desciende. Diagrama de fuerzas:



i) Fuerza peso:

$$p = m \cdot g = 0{,}5 \cdot 9{,}8 = 4{,}9\ (N)$$
$$p_x = p \cdot sen\alpha = 4{,}9 \cdot sen(30°) = 2{,}45\ (N)$$

$$p_y = p \cdot cos\alpha = 4{,}9 \cdot cos\,(30°) = 4{,}24\,(N)$$
$$\rightarrow\ \vec{p} = -2{,}45\hat{\imath} - 4{,}24\hat{\jmath}\,(N)$$

Fuerza normal: 2ª Ley de Newton (1687, Principia)
Como no se mueve en el eje Y la aceleración es cero.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \ \rightarrow\ N - p_y = 0 \ \rightarrow\ N = p_y = 4{,}24\,(N) \ \rightarrow\ \vec{N} = 4{,}24\hat{\jmath}\,(N)$$

Fuerza de rozamiento:

$$F_{roz} = \mu N = 0{,}2 \cdot 4{,}24 = 0{,}85\,(N) \ \rightarrow\ \overrightarrow{F_{roz}} = -0{,}85\hat{\imath}\,(N)$$

Teorema de conservación de la Energía Mecánica:

$$W_{A\to B}^{F_{NC}} = \int_A^B \overrightarrow{F_{NC}} \cdot d\vec{r} = \left|\overrightarrow{F_{NC}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\alpha = E_{MB} - E_{MA} = \Delta E_M$$
$$\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\,(180°) = (\cancel{E_{CB}} + E_{PB}) - (E_{CA} + \cancel{E_{PA}})$$
$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| = E_{PB} - E_{CA}$$
$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| = mgh_B - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Como:

$$sen(30°) = \frac{h_B}{|\Delta\vec{r}|} \ \rightarrow\ |\Delta\vec{r}| = \frac{h_B}{sen(30°)}$$

Sustituyo:

$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot \frac{h_B}{sen(30°)} = mgh_B - \frac{1}{2}mv_A^2$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgh_B + \left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot \frac{h_B}{sen(30°)} = h_B\left(mg + \frac{\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right|}{sen(30°)}\right)$$
$$h_B = \frac{\frac{1}{2}mv_A^2}{mg + \frac{\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right|}{sen(30°)}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 5^2}{0{,}5 \cdot 9{,}8 + \frac{0{,}85}{sen(30°)}} = 0{,}95\,(m)$$

iii) Fuerza peso y normal igual que en el caso anterior.
Fuerza de rozamiento: $\overrightarrow{F_{roz}} = +0{,}85\hat{\imath}\,(N)$

Teorema de conservación de la Energía Mecánica:

$$W_{B\to C}^{F_{NC}} = \int_B^C \overrightarrow{F_{NC}} \cdot d\vec{r} = \left|\overrightarrow{F_{NC}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\alpha = E_{MC} - E_{MB} = \Delta E_M$$
$$\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| \cdot cos\,(180°) = (\cancel{E_{CC}} + E_{PC}) - (\cancel{E_{CB}} + E_{PB})$$
$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| = E_{CC} - E_{PB}$$
$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot |\Delta\vec{r}| = \frac{1}{2}mv_C^2 - mgh_B$$

Como:

$$sen(30°) = \frac{h_B}{|\Delta\vec{r}|} \ \rightarrow\ |\Delta\vec{r}| = \frac{h_B}{sen(30°)}$$

Sustituyo:

$$-\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot \frac{h_B}{sen(30°)} = \frac{1}{2}mv_C^2 - mgh_B$$

$$mgh_B - \left|\overrightarrow{F_{roz}}\right| \cdot \frac{h_B}{sen(30°)} = \frac{1}{2}mv_C^2 \quad \rightarrow \quad v_C^2 = \frac{h_B\left(mg - \frac{\left|\overrightarrow{F_{roz}}\right|}{sen(30°)}\right)}{\frac{1}{2}m}$$

$$v_C^2 = \frac{0{,}95 \cdot \left(0{,}5 \cdot 9{,}8 - \frac{0{,}85}{sen(30°)}\right)}{\frac{1}{2} \cdot 0{,}5} = 12{,}18 \quad \rightarrow \quad v_C = \sqrt{12{,}18} = 3{,}49\ (m/s)$$